Ueber

Complexe 2. Grads,

welche durch Flächenpaare 2. Grads erzeugt werden

(Gekrönte Preisschrift)

von

Ch. Ernst.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

MÜNCHEN
Akademische Buchdruckerei von F. Straub
1885.

Inhalt.

		Seite
§ 1.	Einführung	1
§ 2.	Das Cayley'sche Tetraedroid als Singularitätenfläche	4
§ 3.	Von den Paaren „sichentsprechender" Grundflächen	8
§ 4.	Von den Paaren „sich zugeordneter" Grundflächen	10
§ 5.	Die Zerlegung in Glieder und die graphische Darstellung der Grundflächenkette	13
§ 6.	Die zweierlei Kurven- und Enveloppenschaaren des Tetraedroids	15
§ 7.	Eine zweite Flächenkette für das Tetraedroid	17
§ 8.	Construktion der aufeinanderfolgenden Flächen in einer Kette	19
§ 9.	Die Pluecker'sche Complexfläche als Singularitätenfläche	21
§ 10.	Der Complex, dessen Grundflächen sich in zwei Kegelschnitten treffen	25
§ 11.	Die Grundflächenkette des vorigen Complexes	27
§ 12.	Allgemeine Betrachtung einer Grundflächenschaar	32
§ 13.	Der Complex, dessen Grundflächen sich in zwei Linienpaaren treffen	37
§ 14.	Der Complex, dessen Grundflächen sich längs eines Kegelschnitts berühren	40
§ 15.	Der Complex, dessen Grundflächen eine Kurve mit Doppelpunkt gemeinsam haben	41
§ 16.	Die Grundflächenkette des vorigen Complexes	47
§ 17.	Der Complex, dessen Grundflächen einen Kegelschnitt und ein Linienpaar gemeinsam haben	50
§ 18.	Die Grundflächenkette des vorigen Complexes	51
§ 19.	Der Complex, dessen Grundflächen als gemeinsame Kurve zwei sich berührende Kegelschnitte haben	56
§ 20.	Die Grundflächenkette des letzten Complexes	58
§ 21.	Der Complex, dessen Grundflächen sich längs eines Linienpaares berühren	61
§ 22.	Der Complex, dessen Grundflächen eine Kurve mit Spitze gemeinsam haben	62
§ 23.	Die Grundflächenkette des vorigen Complexes	64

Seite

§ 24. Der Complex, dessen Grundflächen einen Kegelschnitt und ein denselben in einem und demselben Punkt treffendes Linienpaar gemeinsam haben 66

§ 25. Die Grundflächenkette des letzten Complexes 67

§ 26. Der Complex, dessen Grundflächen sich in einer Kurve 3. Ordnung und in einer dieselbe doppelt treffenden Geraden schneiden . 72

§ 27. Die Grundflächenkette des vorigen Complexes 75

§ 28. Der Complex, dessen Grundflächen sich längs einer Erzeugenden berühren und ausserdem zwei Erzeugende gemein haben . . 77

§ 29. Die Grundflächenkette des letzten Complexes 78

§ 30. Der Complex, dessen Grundflächen sich in einer Kurve 3. Ordnung und in einer dieselbe berührenden Geraden treffen 79

Vorwort.

Im Juni 1883 stellte die philosophische Fakultät der Universität München folgende Preisaufgabe:

„Die Geraden, welche zwei Flächen 2. Ordnung in harmonisch getrennten Punktpaaren treffen, bilden einen Strahlencomplex 2. Grads. Diese Geraden treffen aber noch unendlich viele Paare von Flächen 2. Ordnung in harmonisch getrennten Punktpaaren. Man fordert eine Untersuchung dieses Complexes insbesondere in Bezug auf die Lage dieser Schaar von Flächen zu der Singularitätenfläche des Complexes und zwar soll sich die Untersuchung auch auf die speziellen Complexe erstrecken, welche den verschiedenen Fällen von Berührungen entsprechen, die zwischen den zwei den Complex bestimmenden Flächen 2. Ordnung eintreten können."

Nachdem ich die Theorie der Complexe, in der die Gerade als Raumelement betrachtet wird, in Plücker's Werke: „Neue Geometrie des Raumes" (Leipzig 1868 und 1869) studirt hatte, machte ich mich an die Bearbeitung genannter Preisaufgabe. Vorerst dienten mir dabei ausser andern Untersuchungen über Complexe von Klein, Voss, Paivin etc. hauptsächlich die Arbeiten von Battaglini, welcher in seinem „Giornale di Mat." (Bd. 6 u. 7. Napoli 1868 u. 1869) den in der Preisaufgabe genannten allgemeinen Complex ausführlich behandelte. Wie aber dieser Battaglini'sche Complex in der oben angegebenen Weise geometrisch erzeugt werden kann, zeigte erst Aschieri gleichfalls in Battaglini's Giornale (Bd. 8 p. 35). Es blieb mir desshalb, wie in der Aufgabe angedeutet, insbesondere die Unter-

suchung über die unendliche Schaar der den Complex erzeugenden Flächen übrig, sowohl, was deren eigenen Zusammenhang, als auch, was deren Lage zur Singularitätenfläche des Complexes betrifft. Diese Untersuchung, welche den ersten Theil meiner Arbeit bildet, ist mir dadurch hauptsächlich gelungen, dass ich mich dabei auf manche interessante Sätze stützen konnte, welche Schur in den Math. Ann. Bd. 21 bei Bearbeitung eines andern Gegenstandes veröffentlicht hatte. Schur wendet in seiner Arbeit ein besonderes Augenmerk auf die Aufstellung und Interpretirung der Bedingungsgleichung, unter der die besprochene unendliche Flächenschaar sich in Ringe von je 6 Flächen auflöst. Ein Versuch von mir, die allgemeine Bedingungsgleichung für ein solches Auflösen in Ringe von je 2n Flächen aufzustellen, scheiterte bei dem Battaglini'schen Complexe an den zu complizirten Rechnungen, dagegen fand ich in voller Allgemeinheit diese Bedingungsgleichungen für die speziellen Complexe, welche in der Preisaufgabe zu untersuchen waren — Gleichungen, welche dadurch hauptsächlich an Interesse gewinnen, da sie lauter Invarianten für Flächenpaare 2. Grads repräsentiren.

Die Untersuchung der letzt genannten speziellen Complexe bildet den zweiten Theil meiner Arbeit. Dabei handelte es sich vor Allem darum, passende Gleichungen für die erzeugenden Flächenpaare aufzustellen, welche in den verschiedenen Fällen von Berührungen stehen, indem, wie man in der Arbeit selbst erkennen wird, weder die von Sylvester in Phil. Magazine von 1851 p. 119 noch die nach der Weierstrass'schen Methode der Elementartheiler zu findenden Gleichungen sich als geeignet für unsere Zwecke erwiesen. Die 12 Fälle von Berührungen zwischen Flächen 2. Grads haben uns nur zu acht verschiedenen Complexgattungen geführt. Weiler hat nämlich in Math. Ann. Bd. 7 p. 160 die Complexe 2. Grads in 49 Gattungen eingetheilt und nach der Untersuchung eines jeden unserer 12 Complexe konnten wir dessen Identität mit der entsprechenden von Weiler angegebenen Gattung feststellen. Will man alle jene Complexgattungen aufsuchen, welche in der oben angegebenen Weise durch Flächenpaare 2. Grads erzeugt werden können, so muss man nicht allein die verschiedenen Fälle von Berührungen, sondern auch sonstige spezielle Lagen zweier Flächen 2. Grads in die Untersuchung ziehen.

Diese Aufgabe wurde von Segre und Loria gelöst, deren Untersuchungen hierüber in den Math. Ann. Bd. 23 p. 226 erschienen, nachdem meine Arbeit schon vollendet war. Meine auf analytischem Wege durchgeführten Untersuchungen sind zum Theil ausführlicher, als die von Segre und Loria, welche den synthetischen Weg einschlugen. Mehr aber als auf die Complexe selbst richtete ich mein Augenmerk auf die Untersuchung der die Complexe erzeugenden Flächenschaaren 2. Grads. Dass meine Mühe in dieser Hinsicht nicht vergeblich war, zeigt die Kritik, welche die philos. Fakultät der Universität München über meine Arbeit gab.

Ch. Ernst.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556029_0082

I. Theil.

§ 1. Einführung.

Jeder Complex 2. Grads, der im Folgenden behandelt wird, ist definirt als Ort der Geraden, welche zwei Flächen 2. Grads in harmonisch getrennten Punktpaaren treffen, oder welche an zwei Flächen 2. Grads harmonisch getrennte Ebenenpaare schicken; mit der einen Eigenschaft kommt jedem solchen Complex auch die andere zu, wie man sehen wird. Es existirt sogar jedesmal eine unendliche Kette von Flächen 2. Grads, die sich sowohl in Paare ordnen, welche die Complexlinien in harmonisch getrennten Punktpaaren treffen, als auch in Paare, an welche die Complexlinien harmonisch getrennte Ebenenpaare schicken. Jede Fläche in einer solchen Kette heisse eine „Grundfläche“ des betr. Complexes. Bei allen zu betrachtenden Complexen soll dann unsere Hauptaufgabe sein, die zugehörige Kette von Grundflächen sowohl in Bezug auf ihren eignen Zusammenhang, als auch in Bezug auf ihre Lage zur jedesmaligen Singularitätenfläche des Complexes zu untersuchen. Von besonderem Interesse werden dann die zweierlei Kurven 4. Ordnung und die zweierlei Enveloppen 4. Klasse sein, welche die Singularitätenfläche mit der Grundflächenkette gemein hat.

Von den Complexen dieser Art, welche sich offenbar dadurch alle auszeichnen, dass sie die Erzeugenden ihrer unendlich vielen Grundflächen enthalten, betrachten wir zuerst den allgemeinen, dessen ihn erzeugende Grundflächenpaare in allgemeiner Lage sind, später aber gedenken wir der Reihe nach jene zwölf Complexe zu untersuchen, welche aus Grundflächenpaaren von spezieller gegenseitiger Berührung entstehen.

Wie auch die Gleichungen eines Grundflächenpaares gegeben sind, der durch dasselbe erzeugte Complex ergibt sich sofort, nämlich für ein Flächenpaar mit den symbolischen Gleichungen $S(x) = 0$, $S'(x) = 0$ unter der Form:

$$S(x)\ S'(y) - 2\ S(xy)\ S'(xy) + S(y)\ S'(x) = 0, \qquad 1.$$

für ein Flächenpaar mit den Gleichungen $\Sigma(\xi) = 0$, $\Sigma'(\xi) = 0$ dagegen unter der Form:

$$\Sigma(\xi)\ \Sigma'(\eta) - 2\ \Sigma(\xi\eta)\ \Sigma'(\xi\eta) + \Sigma(\eta)\ \Sigma'(\xi) = 0, \qquad 2.$$

worin $S(xy) = x_1 \frac{\delta S(y)}{\delta y_1} + x_2 \frac{\delta S(y)}{\delta y_2} + x_3 \frac{\delta S(y)}{\delta y_3} + x_4 \frac{\delta S(y)}{\delta y_4}$,

$\Sigma(\xi\eta) = \xi_1 \frac{\delta \Sigma(\eta)}{\delta \eta_1} + \xi_2 \frac{\delta \Sigma(\eta)}{\delta \eta_2} + \xi_3 \frac{\delta \Sigma(\eta)}{\delta \eta_3} + \xi_4 \frac{\delta \Sigma(\eta)}{\delta \eta_4}$ gesetzt wurde.

Die Gleichung 1. wird befriedigt durch die Geraden (xy), welche $S(x)=0$, $S'(x) = 0$ in harmonisch getrennten Punktpaaren treffen, die Gleichung 2. durch die Geraden $(\xi\eta)$, welche an $\Sigma(\xi) = 0$, $\Sigma'(\xi) = 0$ harmonisch getrennte Ebenenpaare schicken, wobei die x_i sowohl wie die y_i als variabele Punktcoordinaten resp. die ξ_i sowohl wie die η_i als variabele Ebenencoordinaten zu betrachten sind. In der That sagt z. B. 1. aus, dass die zwei Punktpaare $\mu^2\ S(x) + 2\ \mu\nu\ S(xy) + \nu^2\ S(y) = 0$, $\mu^2 S'(x) + 2\mu\nu\ S'(xy) + \nu^2\ S'(y) = 0$, in denen der variabele Punkt $\mu x_i + \nu y_i$ die Flächen $S(x) = 0$, $S'(x) = 0$ trifft, harmonisch liegen.

In den Complexgleichungen 1. und 2. lassen sich die Pluecker'schen Strahlen- resp. Axencoordinaten $p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$, $\pi_{ik} = \xi_i \eta_k - \eta_i \xi_k$ einführen, sobald die Gleichungen der Grundflächenpaare in voller Form gegeben sind. So erhält man allgemein für das Flächenpaar $\Sigma A_{11} x_1^2 + 2\Sigma A_{12} x_1 x_2 = 0$, $\Sigma A'_{11} x_1^2 + 2\Sigma A'_{12} x_1 x_2 = 0$ den Complex:

$$\Sigma(A_{11} A'_{22} + A_{22} A'_{11} - 2 A_{12} A'_{12}) p_{12}^2 + 2\Sigma(A_{11} A'_{23} + A_{23} A'_{11} - A_{12} A'_{13} - A_{13} A'_{12})\ p_{12}\ p_{13} + 2\ \Sigma\ (A_{12} A'_{34} + A_{34} A'_{12}) \qquad 3.$$
$$(p_{14}\ p_{23} - p_{13}\ p_{42}) = 0,$$

dagegen für das Flächenpaar $\Sigma A_{11} \xi_1^2 + 2\Sigma A_{12} \xi_1 \xi_2 = 0$, $\Sigma A'_{11} \xi_1^2 + 2\Sigma A'_{12} \xi_1 \xi_2 = 0$ den Complex:

$$\Sigma(A_{11} A'_{22} + A_{22} A'_{11} - 2 A_{12} A'_{12}) \pi_{12}^2 + 2\Sigma(A_{11} A'_{23} + A_{23} A'_{11} - A_{12} A'_{13} - A_{13} A'_{12})\ \pi_{12}\ \pi_{13} + 2\ \Sigma\ (A_{12} A'_{34} + A_{34} A'_{12}) \qquad 4.$$
$$(\pi_{14}\ \pi_{23} - \pi_{13}\ \pi_{42}) = 0,$$

wo unter dem Summenzeichen Σ jedesmal nur das erste aus einer Reihe analog zu bildender Glieder steht.

Zur Untersuchung des Complexes, welcher aus Grundflächenpaaren von allgemeiner Lage hervorgeht, geht man aber von folgenden Gleichungen aus:

$$S \equiv a_1\ x_1^2 + a_2\ x_2^2 + a_3\ x_3^2 + a_4\ x_4^2 = 0, \quad S' \equiv a'\ x_1^2 + \ldots = 0,$$
$$\Sigma \equiv \alpha_1\ \xi_1^2 + \alpha_2\ \xi_2^2 + \alpha_3\ \xi_3^2 + \alpha_4\ \xi_4^2 = 0, \quad \Sigma' \equiv \alpha_1'\ \xi_1^2 + \ldots = 0,$$

welche resp. durch 1. und 2. zu den einfachen Complexgleichungen führen:

$$O \equiv a_{12}\ p_{12}^2 + a_{13}\ p_{13}^2 + a_{14}\ p_{14}^2 + a_{23}\ p_{23}^2 + a_{42}\ p_{42}^2 + a_{34}\ p_{34}^2 = 0,^*) \quad 5.$$

$$\Omega \equiv \alpha_{12}\ \pi_{12}^2 + \alpha_{13}\ \pi_{13}^2 + \alpha_{14}\ \pi_{14}^2 + \alpha_{23}\ \pi_{23}^2 + \alpha_{42}\ \pi_{42}^2 + \alpha_{34}\ \pi_{34}^2 = 0, \quad 6.$$

wenn abkürzend $a_i\ a_k' + a_k\ a_i' = a_{ik}$, $\alpha_i\ \alpha_k' + \alpha_k\ \alpha_i' = \alpha_{ik}$ gesetzt wird. Da nun bekanntlich

$$\frac{p_{12}}{\pi_{34}} = \frac{p_{13}}{\pi_{42}} = \frac{p_{14}}{\pi_{23}} = \frac{p_{34}}{\pi_{12}} = \frac{p_{42}}{\pi_{13}} = \frac{p_{23}}{\pi_{14}} \quad 7.$$

ist, so werden die Complexe O und Ω identisch, sobald wir voraussetzen, dass

$$\frac{a_{12}}{\alpha_{34}} = \frac{a_{13}}{\alpha_{42}} = \frac{a_{14}}{\alpha_{23}} = \frac{a_{34}}{\alpha_{12}} = \frac{a_{42}}{\alpha_{13}} = \frac{a_{23}}{\alpha_{14}}. \quad 8.$$

Dies darf in der Folge geschehen, da letztere Relationen weder den Complex noch die Lage des einen der ihn erzeugenden Flächenpaare spezialisiren. Unter dieser Voraussetzung erstreckt sich aber, was nicht unwichtig ist, die Untersuchung des Complexes O (Ω) zugleich auf seine beiden geometrischen Erzeugungsarten und wir dürfen stets den Relationen 8. gemäss die a_{ik} durch die ihnen proportionalen α_{ik} ersetzen.

---

*) Von den Gleichungen 5. und 6. ausgehend hat Battaglini diesen Complex ausführlich untersucht, indem er denselben irrthümlich für den allgemeinsten Complex 2. Grads hielt. Man findet dessen Arbeiten hierüber in seinem Giornale di Mat. Vol. VI 1868 und Vol. VII 1869.

Aschieri veröffentlichte sodann zuerst gleichfalls in Battaglini's Giornale Vol. VIII 1870, p. 35, wie dieser Complex in der oben angegebenen Weise geometrisch erzeugt werden kann.

§ 2. Das Cayley'sche Tetraedroid als Singularitätenfläche.

Die Singularitätenfläche des Complexes O (Ω) ist zwar vielfach untersucht worden*), aber wir glauben eine gedrängte Darstellung derselben bringen zu müssen, weil uns dies zum Verständniss der spätern Untersuchungen als nothwendig erscheint. Eine besondere Rolle spielen im Folgenden die Complexkegel in den Ecken und die Complexkurven in den Seiten des Coordinatentetraeders, wesshalb wir vorerst folgende Symbole einführen:

$$\begin{aligned} O_1 &\equiv a_{12}\,x_2^2 + a_{13}\,x_3^2 + a_{14}\,x_4^2 = 0, \quad O_2 \equiv a_{21}\,x_1^2 + a_{23}\,x_3^2 + a_{24}\,x_4^2 = 0, \\ O_3 &\equiv a_{31}\,x_1^2 + a_{32}\,x_2^2 + a_{34}\,x_4^2 = 0, \quad O_4 \equiv a_{41}\,x_1^2 + a_{42}\,x_2^2 + a_{43}\,x_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{1.}$$

für die Complexkegel in den Tetraederecken,

$$\begin{aligned} \Omega_1' &\equiv \alpha_{32}\;\alpha_{42}\;\xi_2^2 + \alpha_{23}\;\alpha_{43}\;\xi_3^2 + \alpha_{24}\;\alpha_{34}\;\xi_4^2 = 0, \\ \Omega_2' &\equiv \alpha_{31}\;\alpha_{41}\;\xi_1^2 + \alpha_{13}\;\alpha_{43}\;\xi_3^2 + \alpha_{14}\;\alpha_{34}\;\xi_4^2 = 0, \\ \Omega_3' &\equiv \alpha_{21}\;\alpha_{41}\;\xi_1^2 + \alpha_{12}\;\alpha_{42}\;\xi_2^2 + \alpha_{14}\;\alpha_{24}\;\xi_4^2 = 0, \\ \Omega_4' &\equiv \alpha_{21}\;\alpha_{31}\;\xi_1^2 + \alpha_{12}\;\alpha_{32}\;\xi_2^2 + \alpha_{13}\;\alpha_{23}\;\xi_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.}$$

für die Kurven, welche letztere Complexkegel aus den Tetraederseiten ausschneiden,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv \alpha_{12}\,\xi_2^2 + \alpha_{13}\,\xi_3^2 + \alpha_{14}\,\xi_4^2 = 0, \quad \Omega_2 \equiv \alpha_{21}\,\xi_1^2 + \alpha_{23}\,\xi_3^2 + \alpha_{24}\,\xi_4^2 = 0, \\ \Omega_3 &\equiv \alpha_{31}\,\xi_1^2 + \alpha_{32}\,\xi_2^2 + \alpha_{34}\,\xi_4^2 = 0, \quad \Omega_4 \equiv \alpha_{41}\,\xi_1^2 + \alpha_{42}\,\xi_2^2 + \alpha_{43}\,\xi_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.}$$

für die Complexkurven in den Tetraederseiten

$$\begin{aligned} O_1' &\equiv a_{32}\;a_{42}\;x_2^2 + a_{23}\;a_{43}\;x_3^2 + a_{24}\;a_{34}\;x_4^2 = 0, \\ O_2' &\equiv a_{31}\;a_{41}\;x_1^2 + a_{13}\;a_{43}\;x_3^2 + a_{14}\;a_{34}\;x_4^2 = 0, \\ O_3' &\equiv a_{21}\;a_{41}\;x_1^2 + a_{12}\;a_{42}\;x_2^2 + a_{14}\;a_{24}\;x_4^2 = 0, \\ O_4' &\equiv a_{21}\;a_{31}\;x_1^2 + a_{12}\;a_{32}\;x_2^2 + a_{13}\;a_{23}\;x_3^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.}$$

für die Kegel, welche letztere Complexkurven von den Tetraederecken aus projiziren. Schliesslich führen wir noch die Kürzungen ein:**)

---

*) Battaglini beschreibt diese Fläche in seinem Giornale di Mat. 1869 p. 60, nachdem schon früher von Cayley unter dem Titel: „Sur la surface des ondes" Aufsätze darüber erschienen waren im Journal de Math. p. Liouville Bd. 11 p. 291 und später in Crelle's Journal Bd. 65 p. 284, Bd. 83 p. 210 u. 215 und Bd. 87 p. 161.

**) Wo diese Kürzungen angewendet werden und auch sonst, wo sich der Proportionalitätsfaktor heraushebt, kann man die a_{ik} den α_{ik} gleich setzen.

$$
\begin{aligned}
A &= a_{13}\ a_{42} - a_{14}\ a_{23} = \alpha_{13}\ \alpha_{42} - \alpha_{14}\ \alpha_{23},\\
A' &= a_{13}\ a_{42} + a_{14}\ a_{23} = \alpha_{13}\ \alpha_{42} + \alpha_{14}\ \alpha_{23},\\
B &= a_{14}\ a_{23} - a_{12}\ a_{34} = \alpha_{14}\ \alpha_{23} - \alpha_{12}\ \alpha_{34},\\
B' &= a_{14}\ a_{23} + a_{12}\ a_{34} = \alpha_{14}\ \alpha_{23} + \alpha_{12}\ \alpha_{34},\\
C &= a_{12}\ a_{34} - a_{13}\ a_{42} = \alpha_{12}\ \alpha_{34} - \alpha_{13}\ \alpha_{42},\\
C' &= a_{12}\ a_{34} + a_{13}\ a_{42} = \alpha_{12}\ \alpha_{34} + \alpha_{13}\ \alpha_{42}.
\end{aligned}
\qquad 5.
$$

Nun sind die Gleichungen, welche in bekannter Weise aus den Gleichungen des Complexes 5. und 6. in § 1 für die Singularitätenfläche abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
F \equiv\ & a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ x_1^4 + a_{21}\ a_{23}\ a_{24}\ x_2^4 + a_{31}\ a_{32}\ a_{34}\ x_3^4 + a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ x_4^4\\
&+ A'\ (a_{12}\ x_1^2\ x_2^2 + a_{34}\ x_3^2\ x_4^2) + B'\ (a_{13}\ x_1^2\ x_3^2 + a_{42}\ x_4^2\ x_2^2)\\
&+ C'\ (a_{14}\ x_1^2\ x_4^2 + a_{23}\ x_2^2\ x_3^2) = 0,\\
\Phi \equiv\ & \alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}\ \xi_1^4 + \alpha_{21}\ \alpha_{23}\ \alpha_{24}\ \xi_2^4 + \alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{34}\ \xi_3^4 + \alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}\ \xi_4^4\\
&+ A'\ (\alpha_{12}\ \xi_1^2\ \xi_2^2 + \alpha_{34}\ \xi_3^2\ \xi_4^2) + B'\ (\alpha_{13}\ \xi_1^2\ \xi_3^2 + \alpha_{42}\ \xi_4^2\ \xi_2^2)\\
&+ C'\ (\alpha_{14}\ \xi_1^2\ \xi_4^2 + \alpha_{23}\ \xi_2^2\ \xi_3^2) = 0.
\end{aligned}
\qquad 6.
$$

Dieselben lassen sich sodann in die Formen:

$$
O_1\ O_1' + L_1\ x_1^2 = 0, \qquad \Omega_1\ \Omega_1' + \mathcal{A}_1\ \xi_1^2 = 0 \qquad 7.
$$

oder in die Formen

$$
\begin{aligned}
(L_1 + a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\,x_1^2)^2 =\ & a_{12}^2\,A^2\,x_2^4 + a_{13}^2\,B^2\,x_3^4 + a_{14}^2\,C^2\,x_4^4 - 2a_{12}\,a_{13}\,A\,B\,x_2^2 x_3^2\\
&- 2\ a_{12}\ a_{14}\ A\,C\ x_2^2\,x_4^2 - 2a_{13}\ a_{14}\ B\,C\ x_3^2\ x_4^2,\\
(\mathcal{A}_1 + \alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}\,\xi_1^2)^2 =\ & \alpha_{12}^2\,A^2\,\xi_2^4 + \alpha_{13}^2\,B^2\,\xi_3^4 + \alpha_{14}^2\,C^2\,\xi_4^4 - 2\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,A\,B\,\xi_2^2\,\xi_3^2\\
&- 2\ \alpha_{12}\ \alpha_{14}\ A\,C\ \xi_2^2\ \xi_4^2 - 2\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}\ B\,C\ \xi_3^2\ \xi_4^2
\end{aligned}
\qquad 8.
$$

bringen, wozu sowohl bei 7. als auch bei 8. noch 6 analoge Gleichungen gebildet werden können;*) in obigen Gleichungen bedeutet:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ x_1^2 + a_{12}\ A'\ x_2^2 + a_{13}\ B'\ x_3^2 + a_{14}\ C'\ x_4^2,\\
\mathcal{A}_1 &= \alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}\ \xi_1^2 + \alpha_{12}\ A'\ \xi_2^2 + \alpha_{13}\ B'\ \xi_3^2 + \alpha_{14}\ C'\ \xi_4^2.
\end{aligned}
$$

Nach den Gleichungen 7. hat die Singularitätenfläche F (Φ) eine ausgezeichnete Lage zum Coordinatentetraeder. Jede Seite schneidet

---

*) Die Gleichungsformen 7. rühren von Battaglini her. Siehe Battaglini's Giornale 1869, p. 62. Auch die Formen 8. hat Battaglini daselbst angegeben, jedoch unrichtig, wie man sich nach deren Entwickelung durch Vergleichung mit den ursprünglichen Gleichungen der Fläche überzeugen kann. Uebrigens hat schon Cayley im Journal p. Liouville Bd. 11, p. 294 ähnliche Gleichungsformen angegeben, wenn auch mit vollständig anderer Bezeichnungsweise.

dieselbe nach zwei Kurven 2. Grads, von denen die eine die Complexkurve Ω_i dieser Seite ist, die andere durch den Complexkegel O_i der gegenüberliegenden Ecke projizirt wird; jede Ecke schickt an dieselbe zwei Kegel 2. Grads, von denen der eine der Complexkegel O_i dieser Ecke ist, der andere die Complexkurve Ω_i der gegenüberliegenden Seite projizirt. Cayley nannte diese Fläche desshalb „Tetraedroid". Die 16 Doppelpunkte und die 16 Doppelebenen, welche das Tetraedroid besitzt, sind so gelegen, dass je 4 dieser Punkte in einer Tetraederseite liegen und je 4 dieser Ebenen durch eine Tetraederecke gehen. Z. B. liegen in $x_1 = o$ die 4 gemeinsamen Punkte der Kurven $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_1' = 0$:

$$\sqrt{\alpha_{12}\,A}\,\xi_2 \pm \sqrt{\alpha_{13}\,B}\,\xi_3 \pm \sqrt{\alpha_{14}\,C}\,\xi_4 = 0 \qquad 9.$$

als Doppelpunkte, und es gehen durch $\xi_1 = 0$ die 4 gemeinsamen Ebenen der Kegel $O_1 - 0$ und $O_1' - 0$:

$$\sqrt{a_{12}\,A}\,x_2 \pm \sqrt{a_{13}\,B}\,x_3 \pm \sqrt{a_{14}\,C}\,x_4 = 0 \qquad 10.$$

als Doppelebenen der Fläche. Dass dies in der That conische Doppelpunkte und conische Doppelebenen sind, zeigen die Gleichungen 8., deren rechte Seiten gleich sind dem Produkt der linken Seiten der 4 Gleichungen 9., resp. der 4 Gleichungen 10.

Indem wir die sonstigen Eigenschaften dieser Fläche übergehen, betrachten wir noch die 24 Geraden, welche die Doppelpunkte und Doppelebenen derselben aneinander knüpfen, da man in dieser Hinsicht bei Cayley Unrichtigkeiten vorfindet.

Drei Ecken des Tetraeders bilden jedesmal ein zweien Kurven Ω_i und Ω_i' gemeinsames Polardreieck, so dass die 4 Doppelpunkte in einer Tetraederseite, als Schnittpunkte von Ω_i und Ω_i' paarweise auf 6 Geraden liegen, welche zu je zweien durch eine Tedraederecke gehen. Die 16 Doppelpunkte liegen somit paarweise auf 24 Geraden welche zu je 6 durch die Tetraederecken gehen und zu je 6 in den Tetraederseiten liegen. Reciprok schliesst man: die 16 Doppelebenen gehen paarweise durch 24 Geraden, welche zu je 6 in den Tetraederseiten liegen und zu je 6 durch die Tetraederecken gehen. Letztere 24 Geraden sind aber identisch mit den vorigen. Denn fasst man die 16 Schnittlinien der Doppelebenen mit einer Seite $x_i = 0$ ins Auge, so erkennt man, da jede solche Linie die F (Φ) also auch die Kurven Ω_i und Ω_i' nur in zwei (doppelt zu zählenden) Punkten treffen darf, folgendes: Abgesehen von 4 unter diesen 16 Linien, welche

von den 4 durch die Gegenecke gehenden Doppelebenen ausgeschnitten werden und somit gemeinsame Tangenten von Ω_i und Ω_i' sind, müssen die übrigen 12 paarweise zusammenfallen mit den 6 Linien, welche die Schnittpunkte von Ω_i und Ω_i' d. h. die Doppelpunkte in $x_i = 0$ paarweise verbinden; jede dieser 6 Linien ist also Schnittlinie je zweier Doppelebenen und zugleich Verbindungslinie je zweier Doppelpunkte. Dasselbe gilt für die 6 Linien in jeder Tetraederseite und wir haben den Satz:

*Es gibt 24 Geraden, von denen jede Verbindungslinie zweier Doppelpunkte und zugleich Schnittlinie zweier Doppelebenen des Tetraedroids ist; dieselben liegen zu je 6 in den Tetraederseiten und gehen zu je 6 durch die Tetraederecken. Ie drei gehen durch einen Doppelpunkt und liegen in einer Tedraederseite in der Weise, dass jede durch eine andere Ecke geht; je drei liegen in einer Doppelebene und gehen so durch eine Tetraederecke, dass jede in einer andern Seite liegt. Durch jeden Doppelpunkt gehen darum je 3 Paare von Doppelebenen, in jeder Doppelebene liegen je 3 Paare von Doppelpunkten.**)

Bezeichnen wir die Doppelpunkte in einer Seite $x_i = 0$ mit a_i, b_i, c_i, d_i und die Doppelebenen durch eine Ecke $\xi_i = 0$ mit α_i, β_i, γ_i, δ_i, so stellt folgende Tabelle die 24 Geraden sowohl als Schnittlinien je zweier Doppelebenen als auch als Verbindungslinien je zweier Doppelpunkte dar:

---

*) Obwohl Cayley die reciproke Natur des Tetraedroids erkannte, lässt er sich zu Schlüssen führen, die mit unserm Satz nicht übereinstimmen. Er sagt im Journal p. Liouville Bd. 11, p. 291 u. 292: „Autrement dit, les seize points singuliers sont situés deux à deux sur vingt-quatre droites, lesquelles passent six à six par les sommets et sont situées six à six dans les plans du tétraèdre. Donc, en considérant les six droites qui passent par le même sommet, par ces droites combinées deux à deux, il passe quinze plans, y compris trois plans du tétraèdre ...“ Dieser Schluss ist offenbar nicht richtig, denn 6 solche durch eine Ecke gehende Geraden bestimmen nicht 15, sondern ausser den 3 Tetraederseiten nur noch 4 Ebenen, die Doppelebenen durch jene Ecke, sowie 6 solche Geraden in einer Tetraederseite ausser in den 3 Ecken sich nur noch in den 4 Doppelpunkten dieser Seite treffen. Desshalb verlieren folgende von Cayley gefolgerten Sätze ihre Gültigkeit: „Il y a, outre les plans du tétraèdre, quarante-huit plans, douze par chaque sommet, lesquels rencontrent la surface suivant des paires de coniques. Il y a quarante-huit points, douze à douze dans les quatre plans du tétraèdre, pour chacun des quels les cônes circonscrits se réduisent à des paires de cônes du second ordre.“

$a_1 b_1 = \gamma_4 \delta_4$	$a_2 b_2 = \gamma_3 \delta_3$	$a_3 b_3 = \gamma_2 \delta_2$	$a_4 b_4 = \gamma_1 \delta_1$
$a_1 c_1 = \beta_3 \delta_3$	$a_2 c_2 = \beta_4 \delta_4$	$a_3 c_3 = \beta_1 \delta_1$	$a_4 c_4 = \beta_2 \delta_2$
$a_1 d_1 = \beta_2 \gamma_2$	$a_2 d_2 = \beta_1 \gamma_1$	$a_3 d_3 = \beta_4 \gamma_4$	$a_4 d_4 = \beta_3 \gamma_3$
$b_1 c_1 = \alpha_2 \delta_2$	$b_2 c_2 = \alpha_1 \delta_1$	$b_3 c_3 = \alpha_4 \delta_4$	$b_4 c_4 = \alpha_3 \delta_3$
$b_1 d_1 = \alpha_3 \gamma_3$	$b_2 d_2 = \alpha_4 \gamma_4$	$b_3 d_3 = \alpha_1 \gamma_1$	$b_4 d_4 = \alpha_2 \gamma_2$
$c_1 d_1 = \alpha_4 \beta_4$	$c_2 d_2 = \alpha_3 \beta_3$	$c_3 d_3 = \alpha_2 \beta_2$	$c_4 d_4 = \alpha_1 \beta_1$

Man erkennt leicht, wie diese Tafel alle Fragen beantwortet, welche wir in Bezug auf die gegenseitige Lage der Doppelpunkte und Doppelebenen des Tetraedroids stellen können.

§ 3. Von den Paaren „sich entsprechender" Grundflächen.

Zwei Flächen S und S′ mit der Eigenschaft, dass sie von den Geraden des Complexes O (Ω) in harmonisch getrennten Punktpaaren getroffen werden, nennen wir zwei „sich in erster Art entsprechende" Grundflächen. In jedem Punkt der Kurve $S = o$, $S' = o$ zerfällt der Complexkegel, wie aus 1. in § 1 folgt, in zwei Ebenen, welche nichts anderes als die Berührungsebenen von S und S′ in diesem Punkt sind. Somit liegt die gemeinsame Kurve zweier sich in erster Art entsprechender Flächen auf der Singularitätenfläche und ihre Tangenten sind singulare Complexlinien.

Zwei Flächen Σ und Σ' mit der Eigenschaft, dass an sie die Geraden des Complexes O (Ω) harmonisch getrennte Ebenenpaare schicken, nennen wir zwei „sich in zweiter Art entsprechende" Grundflächen. In jeder Ebene der Enveloppe $\Sigma = o$, $\Sigma' = o$ zerfällt die Complexkurve, wie aus 2. in § 1 folgt, in zwei Punkte, welche nichts anderes als die Berührungspunkte von Σ und Σ' mit dieser Ebene sind. Somit umhüllt die gemeinsame Enveloppe zweier sich in zweiter Art entsprechender Flächen die Singularitätenfläche und ihre Erzeugenden sind singuläre Complexlinien.

Ist der Complex gegeben also auch die a_{ik} und α_{ik}, so hat man als Bedingungen, unter denen die Flächen S und S′ sich in erster Art in Bezug auf den Complex entsprechen:

$$a_1 a_2' + a_2 a_1' = a_{12}, \quad a_1 a_3' + a_3 a_1' = a_{13}, \quad a_1 a_4' + a_4 a_1' = a_{14},$$
$$a_3 a_4' + a_4 a_3' = a_{34}, \quad a_4 a_2' + a_2 a_4' = a_{42}, \quad a_2 a_3' + a_3 a_2' = a_{23} \qquad 1.$$

und als Bedingungen, unter denen Σ und Σ' sich in zweiter Art entsprechen:

$$\alpha_1 \alpha_2' + \alpha_2 \alpha_1' = \alpha_{12}, \quad \alpha_1 \alpha_3' + \alpha_3 \alpha_1' = \alpha_{13}, \quad \alpha_1 \alpha_4' + \alpha_4 \alpha_1' = \alpha_{14},$$
$$\alpha_3 \alpha_4' + \alpha_4 \alpha_3' = \alpha_{34}, \quad \alpha_4 \alpha_2' + \alpha_2 \alpha_4' = \alpha_{42}, \quad \alpha_2 \alpha_3' + \alpha_3 \alpha_2' = \alpha_{23}. \qquad 2.$$

Sobald die Gleichung einer Grundfläche gegeben ist, kann mittelst 1. die ihr in erster Art und mittelst 2. die ihr in zweiter Art entsprechende gefunden werden.

Durch Elimination der a_i' aus 1. ergibt sich, dass jede Fläche S eine Grundfläche ist, sobald deren Coeffizienten die Relationen erfüllen:

$$\left.\begin{array}{l} a_3\,a_4\,a_{12} + a_1\,a_2\,a_{34} = a_4\,a_2\,a_{13} + a_1\,a_3\,a_{42} = a_2\,a_3\,a_{14} + a_1\,a_4\,a_{23}, \\ \text{welche man nach 8. in § 1 auch schreiben kann} \\ a_3\,a_4\,\alpha_{34} + a_1\,a_2\,\alpha_{12} = a_4\,a_2'\,\alpha_{42} + a_1\,a_3\,\alpha_{13} = a_2\,a_3\,\alpha_{23} + a_1\,a_4\,\alpha_{14}. \end{array}\right\} 3.$$

Durch Elimination der α_i' aus 2. ergibt sich, dass jede Fläche Σ eine Grundfläche ist, sobald deren Coeffizienten die Relationen erfüllen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_{12} + \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_{34} = \alpha_4\,\alpha_2\,\alpha_{13} + \alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_{42} = \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_{14} + \alpha_1\,\alpha_4\,\alpha_{23}, \\ \text{welche man auch schreiben kann} \\ \alpha_3\,\alpha_4\,a_{34} + \alpha_1\,\alpha_2\,a_{12} = \alpha_4\,\alpha_2\,a_{42} + \alpha_1\,\alpha_3\,a_{13} = \alpha_2\,\alpha_3\,a_{23} + \alpha_1\,\alpha_4\,a_{14}. \end{array}\right\} 4.$$

Die Relationen 3. sowohl als 4. repräsentiren eine unendliche Kette von Grundflächen, man erkennt aber, dass es in beiden Fällen die nämliche Kette ist. Denn sobald die Gleichung einer Fläche in Punktcoordinaten die Relationen 3. befriedigt, muss ihre Gleichung in Ebenencoordinaten die Relationen 4. erfüllen und umgekehrt. Daher:

*Es existirt eine unendliche Kette von Grundflächen für den Complex O (Ω); dieselben ordnen sich zu Paaren solcher Flächen, die sich in erster Art entsprechen, und zugleich zu Paaren solcher Flächen, die sich in zweiter Art entsprechen. Jede Grundfläche ist also sowohl als Ordnungsfläche als auch als Klassenfläche aufzufassen, es entspricht ihr eine Fläche in erster und zugleich eine Fläche in zweiter Art.**)

In der Grundflächenkette kommen vier Kegel und vier Kurven 2. Grads vor, die Complexkegel O_i und die Complexkurven Ω, und dies sind, wie man sich leicht überzeugt, die einzigen Kegel resp. Kurven unter den Grundflächen. In der That befriedigen die bei 1. und 3. in § 2 angegebenen Gleichungen derselben die vorigen Relationen 3. und 4. Die diesen Kegeln O_i in erster Art entsprechende Flächen sind resp.:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 2\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\,x_1^2 + a_{12}\,\lambda_1\,x_2^2 + a_{13}\,\lambda_2\,x_3^2 + a_{14}\,\lambda_3\,x_4^2 = 0, \\ S_2 = 2\,a_{21}\,a_{23}\,a_{24}\,x_2^2 + a_{21}\,\lambda_1\,x_1^2 + a_{24}\,\lambda_2\,x_4^2 + a_{23}\,\lambda_3\,x_3^2 = 0, \\ S_3 = 2\,a_{31}\,a_{32}\,a_{34}\,x_3^2 + a_{34}\,\lambda_1\,x_4^2 + a_{31}\,\lambda_2\,x_1^2 + a_{32}\,\lambda_3\,x_2^2 = 0, \\ S_4 = 2\,a_{41}\,a_{42}\,a_{43}\,x_4^2 + a_{43}\,\lambda_1\,x_3^2 + a_{42}\,\lambda_2\,x_2^2 + a_{41}\,\lambda_3\,x_1^2 = 0 \end{array}\right\} 5.$$

*) Diese Resultate rühren schon von Aschieri her. Siehe Battaglini's Giornale, Vol. VIII 1870 p. 229.

und die den Kurven Ω_i in zweiter Art entsprechende Flächen sind:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= 2\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}\,\xi_1^2 + \alpha_{12}\,\lambda_1\,\xi_2^2 + \alpha_{13}\,\lambda_2\,\xi_3^2 + \alpha_{14}\,\lambda_3\,\xi_4^2 = 0,\\
\Sigma_2 &= 2\alpha_{21}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}\,\xi_2^2 + \alpha_{21}\,\lambda_1\,\xi_1^2 + \alpha_{24}\,\lambda_2\,\xi_4^2 + \alpha_{23}\,\lambda_3\,\xi_3^2 = 0,\\
\Sigma_3 &= 2\alpha_{31}\,\alpha_{32}\,\alpha_{34}\,\xi_3^2 + \alpha_{34}\,\lambda_1\,\xi_4^2 + \alpha_{31}\,\lambda_2\,\xi_1^2 + \alpha_{32}\,\lambda_3\,\xi_2^2 = 0,\\
\Sigma_4 &= 2\alpha_{41}\,\alpha_{42}\,\alpha_{43}\,\xi_2^4 + \alpha_{43}\,\lambda_1\,\xi_3^2 + \alpha_{42}\,\lambda_2\,\xi_2^2 + \alpha_{41}\,\lambda_3\,\xi_1^2 = 0,
\end{aligned} \qquad 6.$$

worin gesetzt wurde:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\,a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23} = -\,\alpha_{12}\,\alpha_{34} + \alpha_{13}\,\alpha_{42} + \alpha_{14}\,\alpha_{23},\\
\lambda_2 &= +\,a_{12}\,a_{34} - a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23} = +\,\alpha_{12}\,\alpha_{34} - \alpha_{13}\,\alpha_{42} + \alpha_{14}\,\alpha_{23},\\
\lambda_3 &= +\,a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} - a_{14}\,a_{23} = +\,\alpha_{12}\,\alpha_{34} + \alpha_{13}\,\alpha_{42} - \alpha_{14}\,\alpha_{23}.
\end{aligned}$$

Auch die Kegel O_i als Klassenflächen und die Kurven Ω_i als Ordnungsflächen betrachtet müssen zu den Grundflächen gerechnet werden, so dass der Kette noch die degenerirten Flächen $\xi_i^2 = 0$ und $x_i^2 = 0$ einzurechnen sind. In der That kann jede der letzteren Flächen als sich selbst entsprechend angesehen werden, wenn man vier zusammenfallende Punkte oder Ebenen als harmonisch liegend annimmt. Es sind dies auch die einzigen sich selbst entsprechenden Flächen der Kette.

§ 4. Von den Paaren „sich zugeordneter" Grundflächen.

Zwei sich in erster Art entsprechende Flächen S und S′ haben, wie wir wissen, eine Kurve 4. Ordnung gemein, welche auf der Fläche F (Φ) liegt und deren Tangenten singuläre Linien sind. Jede Grundfläche S muss also die F (Φ) ausser in der Kurve $S = 0$, $S' = 0$ noch in einer weiteren Kurve 4. Ordnung treffen, bei der es sich fragt, ob auch ihre Tangenten singuläre Linien sind und welche weitere Fläche 2. Grads ausser S durch sie geht. Fassen wir einen Punkt x der fraglichen Kurve ins Auge, so wird das Ebenenpaar, welches den Complexkegel in x ausmacht, die Fläche S in solchen Punkten treffen, die conjugirt sind zu x in Bezug auf S′, d. h. die in der Polarebene von x in Bezug auf S′ liegen. Letztere Ebene schneidet darum S nach einem Linienpaar, sie ist Berührungsebene von S; die singuläre Linie aber in x muss durch deren Berührungspunkt gehen, da sie die Axe des eben genannten Ebenenpaares ist.

Daraus folgt: Die singuläre Linie in x kann im Allgemeinen die S nicht in diesem Punkt (x) berühren, also auch nicht Tangente der fraglichen Kurve sein; ferner: letztere Kurve muss auf der zu S in Bezug auf S′ reciproken Fläche liegen, denn, wenn der Punkt x

auf ihr fortrückt, umhüllt die Polarebene von x in Bezug auf S′ die Fläche S. Daher:

Jede Grundfläche S schneidet die Singularitätenfläche einmal in einer von singulären Linien umhüllten Kurve 4. Ordnung, welche sie mit der ihr in erster Art entsprechender Fläche S′ gemein hat, und dann noch in einer nicht von singulären Linien umhüllten Kurve 4. Ordnung, welche sie gemein hat mit der zu ihr in Bezug auf S′ reciproken Fläche:

$$s \equiv \frac{a_1'^2}{a_1} x_1^2 + \frac{a_2'^2}{a_2} x_2^2 + \frac{a_3'^2}{a_3} x_3^2 + \frac{a_4'^2}{a_4} x_4^2 = 0.^*) \qquad 1.$$

Und reciprok: *Jede Grundfläche Σ schickt an die Singularitätenfläche einmal eine von singulären Linien erzeugte Enveloppe 4. Klasse, welche sie mit der ihr in zweiter Art entsprechenden Fläche Σ′ gemein hat, und dann noch eine nicht von singulären Linien erzeugte Enveloppe 4. Klasse, welche sie gemein hat mit der zu ihr in Bezug auf Σ′ reciproken Fläche:*

$$\sigma = \frac{\alpha_1'^2}{\alpha_1} \xi_1^2 + \frac{\alpha_2'^2}{\alpha_2} \xi_2^2 + \frac{\alpha_3'^2}{\alpha_3} \xi_3^2 + \frac{\alpha_4'^2}{\alpha_4} \xi_4^2 = 0. \qquad 2.$$

Man kann nun zeigen, dass auch durch die Kurve $S = 0$, $s = 0$ ausser S noch eine zweite Grundfläche geht. Eine solche hat nämlich eine Gleichung von der Form $\Theta' S + \Theta s = 0$ und deren Coeffizienten müssen die Relationen 3. in § 3 befriedigen. Dies geschieht in der That aber nur für:

$$\Theta = a_1\ a_2\ a_3\ a_4' + a_1\ a_2\ a_4\ a_3' + a_1\ a_3\ a_4\ a_2' + a_2\ a_3\ a_4\ a_1',$$
$$\Theta' = a_1'\ a_2'\ a_3'\ a_4' + a_1'\ a_2'\ a_4'\ a_3 + a_1'\ a_3'\ a_4'\ a_2 + a_2'\ a_3'\ a_4'\ a_1.$$

Daher: *Für jede Grundfläche* S *existirt in der Kette eine und nur eine Fläche* S, *welche mit ihr eine auf der Singularitätenfläche liegende, aber nicht von singulären Linien umhüllte Kurve 4. Ordnung gemein hat.* Und reciprok: *Für jede Grundfläche Σ existirt in der Kette eine und nur eine Fläche Σ, welche mit ihr eine die Singularitätenfläche umhüllende, aber nicht von singulären Linien erzeugte Enveloppe 4. Klasse gemein hat.*

---

*) Die Ableitungen der Gleichungen 1. und 3. findet man in der Arbeit von Schur, Math. Ann. Bd. 21, p. 522 u. 523. Bei den aus diesen Gleichungen sich ergebenden Sätzen erwähnt aber Schur nichts von der verschiedenen Natur der beiden Kurven, in denen jede Grundfläche die Singularitätenfläche trifft.

Die Gleichungen dieser Flächen nehmen resp. die Formen an:

$$\bar{S} \equiv \frac{a_{12}\ a_{13}\ a_{14}}{a_1} x_1^2 + \frac{a_{21}\ a_{23}\ a_{24}}{a_2} x_2^2 + \frac{a_{31}\ a_{32}\ a_{34}}{a_3} x_3^2 + \frac{a_{41}\ a_{42}\ a_{43}}{a_4} x_4^2 = 0,^*) \quad 3.$$

$$\bar{\Sigma} \equiv \frac{\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}}{\alpha_1} \xi_1^2 + \frac{\alpha_{21}\ \alpha_{23}\ \alpha_{04}}{\alpha_2} \xi_2^2 + \frac{\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{34}}{\alpha_3} \xi_3^2 + \frac{\alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}}{\alpha_4} \xi_4^2 = 0. \quad 4.$$

Man überzeugt sich nun, dass, sobald die Flächen S und Σ identisch sind, es auch die Flächen $\bar{S}$ und $\bar{\Sigma}$ werden. Daher:

Die Grundflächenkette lässt sich in lauter Paare solcher Flächen zerlegen, dass deren gemeinsame Kurve auf der Singularitätenfläche liegt, aber nicht von singulären Linien umhüllt wird, und dass zugleich deren gemeinsame Enveloppe die Singularitätenfläche umhüllt, aber nicht von singulären Linien erzeugt wird.

Die Flächen eines solchen Paares nennen wir (im Gegensatz zu zwei sich entsprechenden Grundflächen) zwei „sich zugeordnete" Grundflächen; und als Bedingungen, unter denen S und $\bar{S}$ resp. Σ und $\bar{\Sigma}$ sich zugeordnet sind, hat man:

$$\begin{gathered} a_1 \bar{a}_1 = a_{12} a_{13} a_{14},\ a_2 \bar{a}_2 = a_{21} a_{23} a_{24},\ a_3 \bar{a}_3 = a_{31} a_{32} a_{34},\ a_4 \bar{a}_4 = a_{41} a_{42} a_{43}, \\ \alpha_1 \bar{\alpha}_1 = \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14},\ \alpha_2 \bar{\alpha}_2 = \alpha_{21} \alpha_{23} \alpha_{24},\ \alpha_3 \bar{\alpha}_3 = \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{34},\ \alpha_4 \bar{\alpha}_4 = \alpha_{41} \alpha_{42} \alpha_{43} \end{gathered} \quad 5.$$

In der Kette existiren vier aber nur vier Flächen mit der bemerkenswerthen Eigenschaft, dass eine jede derselben sich selbst zugeordnet ist. Weder die (nicht von singulären Linien umhüllte) Kurve in der eine solche Fläche die Fläche F (Φ) trifft noch die (nicht von singulären Linien erzeugte) Enveloppe, die sie an die Fläche F (Φ) schickt, gehören daher einer weiteren Grundfläche an. Die Gleichungen dieser vier Flächen ergeben sich aus 5, nämlich:

$$\begin{aligned} X_1 \equiv &- \sqrt{a_{12}\ a_{13}\ a_{14}}\ x_1^2 + \sqrt{a_{21}\ a_{23}\ a_{24}}\ x_2^2 + \sqrt{a_{31}\ a_{32}\ a_{34}}\ x_3^2 \\ &+ \sqrt{a_{41}\ a_{42}\ a_{43}}\ x_4^2 = 0, \\ \Xi_1 \equiv &- \sqrt{\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}}\ \xi_1^2 + \sqrt{\alpha_{21}\ \alpha_{23}\ \alpha_{24}}\ \xi_2^2 + \sqrt{\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{34}}\ \xi_3^2 \\ &+ \sqrt{\alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}}\ \xi_4^2 = 0, \\ X_2 \equiv &+ \sqrt{a_{12}\ a_{13}\ a_{14}}\ x_1^2 - \sqrt{a_{21}\ a_{23}\ a_{24}}\ x_2^2 + \sqrt{a_{31}\ a_{32}\ a_{34}}\ x_3^2 \\ &+ \sqrt{a_{41}\ a_{42}\ a_{43}}\ x_4^2 = 0, \\ \Xi_2 \equiv &+ \sqrt{\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}}\ \xi_1^2 - \sqrt{\alpha_{21}\ \alpha_{23}\ \alpha_{24}}\ \xi_2^2 + \sqrt{\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{34}}\ \xi_3^2 \\ &+ \sqrt{\alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}}\ \xi_4^2 = 0, \end{aligned} \quad 6.$$

*) Siehe Anm. auf p. 11.

$$
\begin{aligned}
X_3 \equiv &+ \sqrt{a_{12}\ a_{13}\ a_{14}}\ x_1^2 + \sqrt{a_{21}\ a_{23}\ a_{24}}\ x_2^2 - \sqrt{a_{31}\ a_{32}\ a_{34}}\ x_3^2 \\
&+ \sqrt{a_{41}\ a_{42}\ a_{43}}\ x_4^2 = 0, \\
\Xi_3 \equiv &+ \sqrt{\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}}\ \xi_1^2 + \sqrt{\alpha_{21}\ \alpha_{23}\ \alpha_{24}}\ \xi_2^2 - \sqrt{\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{34}}\ \xi_3^2 \\
&+ \sqrt{\alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}}\ \xi_4^2 = 0, \\
X_4 \equiv &+ \sqrt{a_{12}\ a_{13}\ a_{14}}\ x_1^2 + \sqrt{a_{21}\ a_{23}\ a_{24}}\ x_2^2 + \sqrt{a_{31}\ a_{32}\ a_{34}}\ x_3^2 \\
&- \sqrt{a_{41}\ a_{42}\ a_{43}}\ x_4^2 = 0, \\
\Xi_4 \equiv &+ \sqrt{\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}}\ \xi_1^2 + \sqrt{\alpha_{21}\ \alpha_{23}\ \alpha_{24}}\ \xi_2^2 + \sqrt{\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{34}}\ \xi_3^2 \\
&- \sqrt{\alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}}\ \xi_4^2 = 0,
\end{aligned}
\qquad 6.
$$

Was die degenerirten Flächen der Kette betrifft, so bemerken wir schliesslich, dass den Flächen O_i oder ξ_i^2 die Flächen x_i^2 resp. Ω zugeordnet sind und umgekehrt.

§ 5. Die Zerlegung in Glieder und die graphische Darstellung der Grundflächenkette.

Wenn wir aus der Kette ein beliebiges Paar zweier sich in erster Art entsprechender Flächen S und S′ herausgreifen, sodann mittelst 5. in § 4 die Gleichungen der beiden denselben zugeordneten Flächen suchen und schliesslich letztere in Ebenencoordinaten bringen, so erfüllen die Coeffizienten der so erhaltenen Gleichungen die Relationen 2 in § 3.

Daher: *Die beiden Flächen, welche zweien sich in erster Art entsprechenden zugeordnet sind, entsprechen sich in zweiter Art.*

In reciproker Weise beweist man:

Die beiden Flächen, welche zweien sich in zweiter Art entsprechenden zugeordnet sind, entsprechen sich in erster Art.

Die gewonnenen Resultate lassen sich zu folgenden interessanten Satz vereinigen:

Die Flächen der Kette ordnen sich in lauter Gruppen von je solchen vier Flächen S, S′, Σ, Σ′, dass S und S′ sich in erster, Σ und Σ′ sich in zweiter Art entsprechen, und dass zugleich S und Σ sowohl als auch S′ und Σ′ sich zugeordnet sind.

Jede derartige Flächengruppe nennen wir ein „Glied“ der Kette. Der letzte Satz nimmt auch die Fassung an:

Wenn wir aus der Kette irgend ein Paar sich zugeordneter Flächen herausgreifen, und für die eine die ihr in erster Art, für die andere die ihr in zweiter Art entsprechende suchen, so sind die so erhaltenen Flächen sich wiederum zugeordnet.

Besonders anschaulich werden alle die gewonnenen Sätze über die Grundflächenkette durch eine graphische Darstellung derselben. Jede Grundfläche stellen wir durch eine Strecke dar, deren eine durch einen dünnen Strich gekennzeichnete Hälfte i dieselbe als Ordnungsfläche und deren andere durch einen dicken Strich gekennzeichnete Hälfte i′ sie als Klassenfläche repräsentiren soll. Die einer solchen Fläche in erster Art entsprechende wird dann durch eine am dünneren Ende errichtete Senkrechte und die ihr in zweiter Art entsprechende durch eine am dickeren Ende errichtete Senkrechte dargestellt; dagegen bedeute die in der Mitte errichtete Senkrechte die zugeordnete Fläche. Dann wird die fortlaufende Kette durch folgende Figur veranschaulicht:

Jedes Quadrat in dieser Figur repräsentirt ein Glied der Kette. In der That enthält ein solches z. B. 4 derartige Flächen 6, 7, 5′, 8′, dass 6 und 7 sich in erster Art, 5′ und 8′ sich in zweiter Art entsprechen, dagegen sowohl 6 und 5′ als auch 7 und 8′ sich zugeordnet sind. In welcher Weise sodann die einzelnen Kettenglieder ineinander eingreifen und wie die aufeinanderfolgenden Flächen selbst unter sich zusammenhängen, zeigt hinreichend die letzte Figur, ohne wohl einer weiteren Erläuterung zu bedürfen.

Wenn wir die in der Kette existirenden Kegel und Kurven ins Auge fassen, erkennen wir, dass jedesmal bei 2 solchen sich zugeordneten Flächen O_i und Ω_i die Kette abbrechen muss. Denn O_i besitzt keine in zweiter Art und Ω_i keine in erster Art entsprechende Fläche. Wollte man aber O_i noch als Klassenfläche und Ω_i noch als Ordnungsfläche ansehen, d. h. $\xi_i^2 = 0$ resp. $x_i^2 = 0$ noch zu den Grundflächen rechnen, so sind dies Flächen, die sich selbst entsprechen, so dass auf alle Fälle die Kette daselbst abbricht. Von einem derartigen Paare sich zugeordneter Flächen O_i und Ω_i aus wird nun der betreffende Kettentheil fort und fort laufen, einmal muss er jedoch auf eine der 4 bekannten sich selbst zugeordneten Flächen $X_i(\Xi_i)$ stossen; von da aus kehrt er aber nothwendig wieder auf dem gleichen Wege zu dem Paare O_i, Ω_i zurück, wie die vorige Figur erkennen lässt, wenn man darin 2 sich zugeordnete Flächen als identisch annimmt. So folgern wir:

Die Grundflächenkette zerfällt in 4 völlig von einander getrennte Theile. Jeder Theil steht mit einer Tedraederseite und deren Gegenecke in einem gewissen Zusammenhang, indem er jedesmal eine Seite $x_i^2 = 0$ *und deren Complexkurve* Ω_i, *sowie eine Ecke* $\xi_i^2 = 0$ *und deren Complexkegel* O_i *als degenerirte Flächen enthält. Ein solcher Kettentheil beginnt resp. bei einem der Paare sich zugeordneter Flächen* O_i *und* Ω_i *und kehrt zu denselben, nachdem er resp. eine der 4 sich selbst zugeordneten Flächen* $X_i(\Xi_i)$ *passirt hat, wieder zurück.*

An den Enden wird er also folgende Gestalt annehmen:

§ 6. Die zweierlei Kurven- und Enveloppen-Schaaren des Tetraedroids.

Aus 3. und 4. in § 3 folgt, dass durch einen gegebenen Punkt 4 Grundflächen gehen, und dass eine gegebene Ebene 4 Grundflächen berühren. Jeder Punkt der Singularitätenfläche aber besitzt die Eigenschaft, dass von den 4 durch ihn gehenden Grundflächen 2 sich in erster Art entsprechen und die beiden andern sich zugeordnet sind; reciprok besitzt jede Ebene der Singularitätenfläche die Eigenschaft, dass von den 4 sie berührenden Grundflächen 2 sich in zweiter Art entsprechen und die beiden andern sich zugeordnet sind.

Dies ist leicht einzusehen. Denn dass durch einen Punkt x der Singularitätenfläche F(Φ) 2, aber nur 2 sich in erster Art entsprechende Flächen gehen, folgt daraus, dass daselbst stets eine, aber nur eine singuläre Linie als Tangente von F (Φ) existirt und dass jede solche Linie auch zugleich Tangente in x an die Schnittkurve irgend zweier sich in erster Art entsprechender Flächen sein muss, indem die Tangenten dieser unendlich vielen Schnittkurven die gesammte Congruenz der singulären Linien ausmachen. Dann ist aber klar, dass die 2 übrigen durch x gehenden Flächen sich zugeordnet sein müssen, denn sonst würden, da jede derselben nothwendig noch eine ihr zugeordnete Fläche besitzt, welche durch x gehen muss, mehr als 4 Grundflächen durch diesen Punkt gehen. Ebenso wird der reciproke Beweis geführt.

Dadurch gelangten wir zu folgenden Sätzen:

Die Singularitätenfläche des Complexes $O(\Omega)$ *besitzt zwei Schaaren von Kurven 4. Ordnung (erster Spezies) und reciprok 2 Schaaren von Enveloppen 4. Klasse. Die singularen Linien des Complexes bilden die Tangenten der einen Kurvenschaar und zugleich die Erzeugenden der einen Enveloppenschaar. Die zweite Kurven- und die zweite Enveloppenschaar enthalten keine singuläre Complexlinien. Jede Kurve der ersten Schaar trifft jede Kurve der zweiten Schaar in 8 Punkten, nie aber treffen sich 2 Kurven aus derselben Schaar, indem durch jeden Punkt der Fläche nur je eine Kurve aus jeder Schaar geht. Reciprok hat jede Enveloppe der ersten Schaar mit jeder Enveloppe der zweiten Schaar 8 Ebenen gemein, nie aber haben 2 Enveloppen aus derselben Schaar eine Ebene gemein, indem jede Ebene der Fläche nur je eine Enveloppe aus jeder Schaar berührt.*

Zu der ersten Kurvenschaar sind die 4 Complexkurven Ω_i, zu der zweiten die 4 Kurven Ω_i' zu rechnen; reciprok gehören zu der ersten Enveloppenschaar die 4 Complexkegel O_i, zu der zweiten die 4 Kegel O_i', wobei eine solche Kurve oder ein solcher stets doppelt zu zählen ist. Die Kurven Ω_i' sind nämlich den sich zugeordneten Grundflächen O_i und $x_i^2 = 0$ und die Kegel O_i' den sich zugeordneten Flächen Ω_i und $\xi_i^2 = 0$ gemeinsam; dagegen sind die Ω_i Kurven, in denen die sich selbst entsprechenden Flächen $x_i = 0$ die Singularitätenfläche treffen, und die O_i sind Kegel, welche die sich selbst entsprechenden Flächen $\xi_i^2 = 0$ an die Singularitätenfläche schicken. In der That, wenn man den Complex:

$$a_{12}\ a_{34}\ p_{12}\ p_{34} + a_{13}\ a_{42}\ p_{13}\ p_{42} + a_{14}\ a_{23}\ p_{14}\ p_{23} = c,$$
$$\alpha_{12}\ \alpha_{34}\ \pi_{12}\ \pi_{34} + \alpha_{13}\ \alpha_{42}\ \pi_{13}\ \pi_{42} + \alpha_{14}\ \alpha_{23}\ \pi_{14}\ \pi_{23} = 0$$

untersucht, welcher aus dem Complex $O(\Omega)$ dessen singuläre Linien ausschneidet, findet man, dass sowohl die Tangenten der Ω_i als auch die Erzeugenden der O_i' singuläre Linien sind.

Spezielle Fälle des obigen Satzes sind:

Jede Kurve der einen Schaar trifft jede Kurve Ω_i *und jede Kurve der andern Schaar jede* Ω_i' *stets in solchen 4 Punkten, welche zu je zweien auf 6 Geraden liegen, die paarweise durch 3 Tedraederecken gehen.*

Jede Enveloppe der einen Schaar schickt an jeden Kegel O_i *und jede Enveloppe der zweiten Schaar an jeden Kegel* O_i' *stets solche 4 Ebenen, welche zu je zweien durch 6 Gerade gehen, die paarweise in 3 Tedraederseiten liegen.*

Man braucht zum Beweise des eben Gesagten nur zu berücksichtigen, dass zwei Grundflächen, welche eine solche Kurve oder Enveloppe bestimmen, das Coordinatentetraeder zum gemeinsamen Polartetraeder haben.

§ 7. Eine zweite Flächenkette für das Tetraedroid.

Ausser dem Complex O (Ω) existirt noch ein zweiter Complex:

$$O' \equiv \frac{p_{12}^2}{a_{34}} + \frac{p_{13}^2}{a_{42}} + \frac{p_{14}^2}{a_{23}} + \frac{p_{34}^2}{a_{12}} + \frac{p_{42}^2}{a_{13}} + \frac{p_{23}^2}{a_{14}} = 0, \qquad 1.$$

$$\Omega' \equiv \frac{\pi_{12}^2}{\alpha_{34}} + \frac{\pi_{13}^2}{\alpha_{42}} + \frac{\pi_{14}^2}{\alpha_{23}} + \frac{\pi_{34}^2}{\alpha_{12}} + \frac{\pi_{42}^2}{\alpha_{13}} + \frac{\pi_{23}^2}{\alpha_{14}} = 0, \qquad 2.$$

der die nämliche Singularitätenfläche besitzt. Die Grundflächenkette dieses zweiten Complexes ist aber eine andere, denn während eine Fläche S oder Σ zur Kette von O (Ω) gehört, sobald resp.:

$$\begin{aligned} m &= a_3\ a_4\ a_{12} + a_1\ a_2\ a_{34} = a_4\ a_2\ a_{13} + a_1\ a_3\ a_{42} \\ &= a_2\ a_3\ a_{14} + a_1\ a_4\ a_{23}, \end{aligned} \qquad 3.$$

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_{12} + \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_{34} = \alpha_4\ \alpha_2\ \alpha_{13} + \alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_{42} \\ &= \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_{14} + \alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_{23}, \end{aligned}$$

gehört dieselbe zur Kette von O' (Ω'), wenn resp.:

$$n = \frac{a_3\ a_4}{a_{34}} + \frac{a_1\ a_2}{a_{12}} = \frac{a_4\ a_2}{a_{42}} + \frac{a_1\ a_3}{a_{13}} = \frac{a_2\ a_3}{a_{23}} + \frac{a_1\ a_4}{a_{14}}, \qquad 4.$$

$$\nu = \frac{\alpha_3\ \alpha_4}{\alpha_{34}} + \frac{\alpha_1\ \alpha_2}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_4\ \alpha_2}{\alpha_{42}} + \frac{\alpha_1\ \alpha_3}{\alpha_{13}} = \frac{\alpha_2\ \alpha_3}{\alpha_{23}} + \frac{\alpha_1\ \alpha_4}{\alpha_{14}}.$$

Die beiden Flächenketten haben, wie man sich aus 3. und 4. überzeugt, abgesehen von den degenerirten Flächen $x_i^2 = 0$ und $\xi_i^2 = 0$, nur die vier bekannten Flächen X_i (Ξ_i) gemeinsam, welche in beiden Ketten sich selbst zugeordnet sind.

Während die O_i und Ω_i als Complexkegel resp. Complexkurven von O (Ω) der ersten Kette angehören, gehören die O_i' und Ω_i' als Complexkegel resp. Complexkurven von O' (Ω') der zweiten Kette an. Während also die Erzeugenden der O_i und die Tangenten der Ω_i singuläre Linien für O (Ω) sind, sind die Erzeugenden der O_i' und die Tangenten der Ω_i' singuläre Linien für O' (Ω').

Die Congruenz der singulären Linien von O (Ω) kann somit nicht identisch sein mit der Congruenz der singulären Linien von O′ (Ω'). In der That gilt der interessante Satz:

Die Tangenten der einen Kurvenschaar 4. Ordnung des Tetraedroids, zugleich die Erzeugenden der einen Enveloppenschaar desselben, sind die singulären Linien des Complexes O (Ω); *die Tangenten der andern Kurvenschaar 4. Ordnung, zugleich die Erzeugenden der andern Enveloppenschaar, sind die singulären Linien des Complexes* O′ (Ω'). Dieser Satz ergibt sich aus folgendem:

Zwei sich in erster Art entsprechende Flächen $S = 0$ *und* $S' = 0$ *des Complexes* O (Ω) *haben dieselbe Kurve gemein, wie die zwei sich zugeordneten Flächen* $\sqrt{m'}\, S \pm \sqrt{m}\, S' = 0$ *des Complexes* O′ (Ω'), *und zwei sich in zweiter Art entsprechende* $\Sigma = 0$ *und* $\Sigma' = 0$ *des Complexes* O (Ω) *haben dieselbe Enveloppe gemein, wie die zwei sich zugeordneten Flächen* $\sqrt{\mu'}\, \Sigma \pm \sqrt{\mu}\, \Sigma' = 0$ *des Complexes* O′ (Ω').

Wenn nämlich S und S′ in Bezug auf O (Ω) sich in erster Art entsprechen, so braucht man nur zu beweisen, dass es zwei Flächen $S + k S'$ gibt, welche dem Complex O′ (Ω') angehören, da dann letztere nothwendig für O′ (Ω') sich zugeordnet sein müssen. Zur Bestimmung von k hat man nach 4:

$$\frac{(a_3 + k a_3')(a_4 + k a_4')}{a_{34}} + \frac{(a_1 + k a_1')(a_2 + k a_2')}{a_{12}} = \frac{(a_4 + k a_4')(a_2 + k a_2')}{a_{42}}$$

$$+ \frac{(a_1 + k a_1')(a_3 + k a_3')}{a_{13}} = \frac{(a_2 + k a_2')(a_3 + k a_3')}{a_{23}} + \frac{(a_1 + k a_1')(a_4 + k a_4')}{a_{14}},$$

woraus $k = \pm \sqrt{\frac{m}{m'}}$ folgt und in der That befriedigt dieser Werth beide Relationen.

Die beiden Flächenketten, welche das Tetraedroid umgeben, beginnen also viermal und zwar getrennt bei den sich zugeordneten Flächenpaaren O_i (Ω_i) *resp.* O_i' (Ω_i'). *sie vereinigen sich aber jedesmal bei den sich selbst zugeordneten Flächen* X_i (Ξ_i). *Während nämlich eine Kurve 4. Ordnung oder eine Enveloppe 4. Klasse, welche eine solche Fläche* X_i (Ξ_i) *mit dem Tedraedroid gemein hat, keiner Grundfläche des einen Complexes mehr angehört, gehört dieselbe der in erster resp. in zweiter Art entsprechenden Grundfläche des andern Complexes zu. Ueberhaupt besitzen irgend zwei sich zugeordnete Flächen der einen Kette eine Kurve, welche zweien sich in erster Art entsprechenden, und eine Enveloppe, welche zweien sich in zweiter Art entsprechenden Flächen der andern Kette angehört.*

§ 8. Construction der aufeinanderfolgenden Flächen in einer Kette.

Nicht uninteressant ist es, zu einer Flächenkette, die bisher betrachtet wurde, das Analoge in der Ebene aufzusuchen, besonders da wir dadurch eine geometrische Construction derselben kennen lernen.

Es sei $O \equiv \alpha_{23}\, x_1^2 + \alpha_{13}\, x_2^2 + \alpha_{12}\, x_3^2 = 0$ und $\Omega \equiv a_{23}\, \xi_1^2 + \alpha_{13}\, \xi_2^2 + a_{12}\, \xi_3^2 = 0$ ein gegebenes Kurvenpaar, dann gibt es eine unendliche Kette von Kurven, die mit O und Ω durch merkwürdige Beziehungen zusammenhängen. Dieselben ordnen sich nämlich:

1) zu Paaren sich in erster Art entsprechender Kurven, deren vier gemeinsame Punkte auf O liegen und welche jede Tangente von Ω in harmonisch getrennten Punktpaaren trifft,

2) zu Paaren sich in zweiter Art entsprechender Kurven, deren vier gemeinsame Tangenten Ω berühren und an welche jeder Punkt von O harmonisch getrennte Tangentenpaare schickt,

3) zu Paaren sich zugeordneter Kurven, deren gemeinsame Punkte auf Ω liegen und deren gemeinsame Tangenten O berühren.

Als Bedingungen, unter denen $S \equiv a_1\, x_1^2 + a_2\, x_2^2 + a_3\, x_3^2 = 0$, $S' \equiv a_1'\, x_1^2 + a_2'\, x_2^2 + a_3'\, x_3^2 = 0$ sich in erster Art entsprechen, hat man:

$$a_1\, a_2' + a_2\, a_1' = a_{12}, \quad a_1\, a_3' + a_3\, a_1' = a_{13}, \quad a_2\, a_3' + a_3\, a_2' = a_{23},$$

und als Bedingungen, unter denen dieselben sich zugeordnet sind:

$$a_1\, a_1' = a_{12}\, a_{13}\, \alpha_{23}, \quad a_2\, a_2' = a_{21}\, a_{23}\, \alpha_{13}, \quad a_3\, a_3' = a_{31}\, a_{32}\, \alpha_{12};$$

ebenso hat man als Bedingungen, unter denen $\Sigma \equiv \alpha_1\, \xi_1^2 + \alpha_2\, \xi_2^2 + \alpha_3\, \xi_3^2 = 0$, $\Sigma' \equiv \alpha_1'\, \xi_1^2 + \alpha_2'\, \xi_2^2 + \alpha_3'\, \xi_3^2 = 0$ sich in zweiter Art entsprechen:

$$\alpha_1\, \alpha_2' + \alpha_2\, \alpha_1' = \alpha_{12}, \quad \alpha_1\, \alpha_3' + \alpha_3\, \alpha_1' = \alpha_{13}, \quad \alpha_2\, \alpha_3' + \alpha_3\, \alpha_2' = \alpha_{23},$$

und als Bedingungen, unter denen dieselben sich zugeordnet sind:

$$\alpha_1\, \alpha_1' = \alpha_{12}\, \alpha_{13}\, a_{23}, \quad \alpha_2\, \alpha_2' = \alpha_{21}\, \alpha_{23}\, a_{13}, \quad \alpha_3\, \alpha_3' = \alpha_{31}\, \alpha_{32}\, a_{12}.$$

Ueberhaupt gehört eine Kurve zu der durch O und Ω bestimmten Kette, sobald:

$$k\, a_3\, a_{12} + a_1\, a_2\, \alpha_{12} = k\, a_2\, a_{13} + a_1\, a_3\, \alpha_{13} = k\, a_1\, a_{23} + a_2\, a_3\, \alpha_{23} \text{ resp.}$$
$$k\, \alpha_3\, \alpha_{12} + \alpha_1\, \alpha_2\, a_{12} = k\, \alpha_2\, \alpha_{13} + \alpha_1\, \alpha_3\, a_{13} = k\, \alpha_1\, \alpha_{23} + \alpha_2\, \alpha_3\, a_{23},$$

wo k eine willkürliche Grösse ist.

Was den Zusammenhang der verschiedenartigen Kurvenpaaren in dieser Kette betrifft, so gelten alle Sätze wieder, welche wir für die analoge Flächenkette gefunden haben. Auch die Kurvenkette zerfällt in vier völlig getrennte Theile; jeder Theil besitzt eine sich selbst zugeordnete Kurve und bricht mit zwei sich zugeordneten Kurven ab, nämlich die drei ersten Theile mit den degenerirten Kurvenpaaren:

$$O_1 \equiv a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2 = 0, \quad O_2 \equiv a_{21}x_1^2 + a_{23}x_3^2 = 0, \quad O_3 \equiv a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2 = 0,$$
$$\Omega_1 \quad \alpha_{12}\xi_2^2 + \alpha_{13}\xi_3^2 = 0; \quad \Omega_2 \equiv \alpha_{21}\xi_1^2 + \alpha_{23}\xi_3^2 = 0, \quad \Omega_3 \equiv \alpha_{31}\xi_1^2 + \alpha_{32}\xi_2^2 = 0,$$

und der letzte Theil mit O und Ω selbst etc. etc.

Die ausgesprochenen Sätze leiten sich einfach aus den früheren über die Flächenkette ab, wenn man diese durch $x_4 = 0$ geschnitten denkt und berücksichtigt, dass $\xi_4 = 0$ Pol von $x_4 = 0$ für sämmtliche Flächen derselben ist.

Sobald O *und* Ω *gegeben sind, lässt sich jede Kurve* S, Σ *der Kette construiren, von der ein Punkt* x *auf* O *oder eine Tangente* ξ *an* Ω *bekannt ist.*

Denn jede S, Σ hat das gleiche Polardreieck wie O und Ω. Es treffen also die Verbindungslinien von x mit den Ecken des Tedraeders die Kurve O noch in drei weiteren Punkten von S und die Tangente von S in x erhält man (mit Rücksicht auf 1.) als eine jener Linien, welche x an Ω schickt; ebenso schicken die Schnittpunkte von ξ mit den Seiten des Tedraeders an die Kurve Ω noch drei weitere Tangenten an Σ und den Berührungspunkt von Σ mit ξ erhält man (mit Rücksicht auf 2.) als einen jener Punkte, in denen ξ die O trifft.

Sobald dann ausser O *und* Ω *eine Kurve* S, Σ *der Kette gegeben ist, lässt sich sowohl die derselben in erster oder zweiter Art entsprechende als auch die ihr zugeordnete Kurve und somit der Reihe nach der ganze Kettentheil construiren, dem die* S, Σ *zugehört.*

Mit S, Σ sind nämlich vier Punkte und die Tangenten in denselben sowohl für die ihr in erster Art entsprechende S′ als auch für die ihr in zweiter Art entsprechende Σ' bekannt. Denn die vier gemeinsamen Punkte x von S und O liegen auf S′ und die vier gemeinsamen Tangenten ξ von Σ und Ω berühren Σ'; ferner sind die vier Linien, welche die x (abgesehen von den vier Tangenten in x an S) an die Ω schicken, Tangenten in x an S′ (nach 1.) und es sind die vier Punkte, in denen die ξ (abgesehen von den vier Berührungspunkten der ξ mit Σ) die O treffen, Berührungspunkte der ξ mit Σ' (nach 2.). Ebenso sind mit S, Σ vier Punkte und vier Tangenten für

die zugeordnete Fläche S, $\bar{\Sigma}$ gegeben. Denn die vier gemeinsamen Punkte von S, Σ mit Ω liegen auf S, Σ und die vier gemeinsamen Tangenten von S, Σ mit O berühren $\bar{S}$, $\bar{\Sigma}$.

So sind wir in den Stand gesetzt, nicht nur eine solche Kurvenkette, sondern auch die analoge Flächenkette im Raum zu construiren. Es beruht dies darauf, dass eine Fläche als bekannt anzusehen ist, sobald deren Schnittkurven mit drei Tedraederseiten construirt sind. Nun ist es aber stets möglich, für die aufeinanderfolgenden Flächen eines Kettentheils deren Schnittkurven in drei Tetraederseiten der Reihe nach zu construiren; denn für eine dieser Flächen, nämlich für den Kegel O_i sind die drei Schnittkurven als die drei Linienpaare gegeben, welche die Ecke $\xi_i = 0$ an drei der Kurven Ω_i schickt. Daraus folgt:

Indem man jedesmal von einem der vier Kegel O_i *resp.* O_i' *ausgeht, kann man jeden Theil der beiden Flächenketten des Tetraedroids construiren, wenn nur die* O_i *und* O_i', *d. h. die 16 Doppelpunkte und die 16 Doppelebenen jener Fläche gegeben sind.*

§ 9. Die Pluecker'sche Complexfläche als Singularitätenfläche.

Der Battaglini'sche Complex $O(\Omega)$ ist bekanntlich nicht der allgemeinste vom 2. Grad, gehört jedoch der allgemeinsten unter den 49 Gattungen an, in die Weiler die Complexe 2. Grads eingetheilt hat.*) Die Gattung von $O(\Omega)$ ändert sich aber, wenn man einen oder mehrere Coeffizienten seiner Gleichung verschwinden lässt. Dadurch könnten wir leicht aus den früheren allgemeinen Sätzen die Eigenschaften einer Reihe von Complexgattungen ableiten und würden, wenn wir mit den später zu behandelnden Complexen ebenso verführen, zu einer einfachen Untersuchung der verschiedenen Complexe geführt werden, die überhaupt in der bekannten Weise durch Flächenpaare 2. Grads erzeugt werden.**) Da diese Spezialisirungen nicht eine besondere Art von Berührung zwischen den Grundflächenpaaren bedingen, so gehört deren Untersuchung nicht zu unserer Aufgabe.

*) Siehe Weiler: „Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe 2. Grads." Matth. Ann. Bd. 7 p. 145—207.

**) Ueber denselben Gegenstand, jedoch auf anderen Weg durchgeführt, erschien in den Math. Ann. Bd. 23 p. 211—234, nachdem diese Arbeit bereits vollendet war, eine Abhandlung von Segre und Loria: „Sur les differentes espèces de complexes du 2º dégré de droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre."

Indem wir uns vorbehalten, bei anderer Gelegenheit diesen Gegenstand eingehender zu behandeln, beschränken wir uns hier darauf, nur ein Beispiel zu betrachten.

Lässt man in $O = 0$, $\Omega = 0$ den Coeffizient $a_{34} = \alpha_{12}$ verschwinden, so wird:

$$O_3 = a_{31}\, x_1^2 + a_{32}\, x_2^2, \qquad O_4 = a_{41}\, x_1^2 + a_{42}\, x_2^2,$$
$$\Omega_1 = \alpha_{13}\, \xi_3^2 + \alpha_{14}\, \xi_4^2, \qquad \Omega_2 = \alpha_{23}\, \xi_3^2 + \alpha_{24}\, \xi_4^2,$$

d. h. eine der Tedraederkanten wird Complexlinie. Die Doppelpunkte der Singularitätenfläche in $x_1 = 0$ resp. $x_2 = 0$: $\sqrt{\alpha_{32}}\, \xi_3 \pm \sqrt{-\alpha_{24}}\, \xi_4 = 0$, $\sqrt{\alpha_{13}}\, \xi_3 \pm \sqrt{-\alpha_{14}}\, \xi_4 = 0$ fallen mit den Punktpaaren zusammen, welche die Complexkurven in diesen Seiten ausmachen, und die Doppelebenen durch $\xi_3 = 0$ resp. $\xi_4 = 0$: $\sqrt{a_{14}}\, x_1 \pm \sqrt{-a_{24}}\, x_2 = 0$, $\sqrt{a_{13}}\, x_1 \pm \sqrt{-a_{23}}\, x_2 = 0$ fallen mit den Ebenenpaaren zusammen, welche die Complexkegel in diesen Ecken ausmachen.

Letztere Doppelpunkte a, a′, b, b′ liegen auf der Tetraederkante D und letztere Doppelebenen α, α', β, β' gehen durch D, so dass folgende unter den 24 Geraden des Tetraedroids mit D zusammenfallen (siehe § 2 am Ende):

$$\begin{array}{llll} a_1\, c_1 = \beta_3\, \delta_3, & b_1\, d_1 = \alpha_3\, \gamma_3, & a_1\, b_1 = \gamma_4\, \delta_4, & c_1\, d_1 = \alpha_4\, \beta_4, \\ a_2\, c_2 = \beta_4\, \delta_4, & b_2\, d_2 = \alpha_4\, \gamma_4, & a_2\, b_2 = \gamma_3\, \delta_3, & c_2\, d_2 = \alpha_3\, \beta_3. \end{array} \quad 1.$$

Durch a, a′, b, b′ gehen dann resp. die Geraden:

$$a_1\, d_1 = \beta_2\, \gamma_2, \quad b_1\, c_1 = \alpha_2\, \delta_2, \quad a_2\, d_2 = \beta_1\, \gamma_1, \quad b_2\, c_2 = \alpha_1\, \delta_1 \quad 2.$$

und in α, α'' β, β' liegen resp. die Geraden:

$$\alpha_3\, \delta_3 = b_4\, c_4, \quad \beta_3\, \gamma_3 = a_4\, d_4, \quad \alpha_4\, \delta_4 = b_3\, c_3, \quad \beta_4\, \gamma_4 = a_3\, d_3. \quad 3$$

Die noch übrigen 8 Geraden sind:

$$\begin{array}{llll} a_3\, b_3 = \gamma_2\, \delta_2, & a_3\, c_3 = \beta_1\, \delta_1, & c_3\, d_3 = \alpha_2\, \beta_2, & b_3\, d_3 = \alpha_1\, \gamma_1, \\ a_4\, b_4 = \gamma_1\, \delta_1, & a_4\, c_4 = \beta_2\, \delta_2, & c_4\, d_4 = \alpha_1\, \beta_1, & b_4\, d_4 = \alpha_2\, \gamma_2. \end{array} \quad 4.$$

Während die $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ conische Doppelebenen und die $a_3, b_3, c_3, d_3, a_4, b_4, c_4, d_4$ conische Doppelpunkte der Fläche sind, sind die α, α', β, β' bilineare Doppelebenen, deren Berührungskurve mit der Fläche aus zwei Linien besteht (nämlich ausser der jedesmaligen Linie D noch aus je einer der Linien 3.) und die a, a′, b, b′ bilineare Doppelpunkte, deren Berührungskegel an die Fläche aus zwei Ebenenbüscheln besteht (nämlich ausser dem jedesmaligen Büschel D noch aus je einem der

Büschel 2.). In jeder conischen Doppelebene liegen vier conische und ein bilinearer Doppelpunkt; durch jeden conischen Doppelpunkt gehen vier conische und eine bilineare Doppelebene. In jeder bilinearen Doppelebene liegen ausser den vier bilinearen noch zwei conische Doppelpunkte; durch jeden bilinearen Doppelpunkt gehen ausser den vier bilinearen noch zwei conische Doppelebenen etc. etc. Ueberhaupt lassen sich alle Fragen in Bezug auf die gegenseitige Lage der Doppelpunkte und Doppelebenen mittelst 1., 2., 3., 4. beantworten.*)

Was die Strahlenbüschel von singulären Linien in einer bilinearen Doppelebene oder in einem bilinearen Doppelpunkt betrifft, so bemerke man: In jeder bilinearen Doppelebene zerfällt die Complexkurve in zwei mit einer Tedraederecke auf D zusammenfallende Punkte; in jedem bilinearen Doppelpunkt zerfällt der Complexkegel in zwei mit einer Tetraederseite durchD zusammenfallende Ebenen.

Nicht weniger interessante Resultate erhalten wir, wenn wir die Kette der Grundflächen untersuchen. Ich erwähne nur, dass für jede eigentliche Fläche 2. Grads die zugeordnete in ein Ebenen- resp. Punktpaar degenerirt, so dass die graphische Darstellung der Kette folgende wird:

Hier stellen nur die Strecken eigentliche Flächen dar, die Punkte repräsentiren Ebenenpaare durch die Doppellinie D resp. Punktpaare auf D. Während daher die singulären Linien eine Schaar von Kurven 4. Ordnung und zugleich eine Schaar von Enveloppen 4. Klasse bilden, existirt auf der Singularitätenfläche noch eine nicht von singulären Linien umhüllte Schaar von Kurven 2. Ordnung, deren Ebenen sämmtlich durch D gehen, und eine nicht von singulären Linien erzeugte Schaar von Kegeln 2. Ordnung, deren Spitzen sämmtlich auf D liegen.**) Ein zweiter Complex, der zur nämlichen Singularitätenfläche führt, existirt hier nicht.

*) Die betrachtete Fläche ist nichts anders als die allgemeine Pluecker'sche Complexfläche, nur dadurch etwas specialisirt, dass die conischen Doppelpunkte zu je vier in zwei Tedraederseiten liegen und die conischen Doppelebenen zu je vier durch zwei Tedraederecken gehen.

**) Dies sind Resultate, welche mit der Definition der Pluecker'schen Complexfläche übereinstimmen.

II. Theil.

Wir gehen jetzt zu den speziellen Complexen über, deren Grundflächen in den verschiedenen Fällen von Berührung stehen; es gibt bekanntlich zwölf verschiedene Fälle von Berührung zwischen Flächen 2. Grads. Bei jedem dieser Fälle handelt es sich vorerst darum, passende Gleichungsformen für die Grundflächenpaare aufzusuchen, von denen wir dann auszugehen haben. Denn nicht jede Form ist für unsere Zwecke geeignet und die kürzere Gleichungsform für ein Grundflächenpaar hat oft keineswegs den Vortheil zu einer einfacheren Complexgleichung zu führen. Hat man z. B. für ein Grundflächenpaar ganz einfache Gleichungen in Punktcoordinaten gefunden, so nehmen dieselben, sobald sie in Ebenencoordinaten gebracht werden, längere Formen an. Der erste Gesichtspunkt bei der Auswahl dieser Gleichungen ist aber der, dass dieselben in Punkt- wie in Ebenencoordinaten die gleiche Anzahl von Gliedern zeigen. Dies ist schon für die Symmetrie und die Reciprocität in den Rechnungsformen nöthig, ausserdem würde man, wie gesagt, wenn man letzten Gesichtspunkt nicht berücksichtigen und scheinbar überflüssige Glieder in einer Gleichungsform der Grundflächenpaare weglassen würde, doch nicht eine einfachere Gleichung des zugehörigen Complexes erhalten.

Ferner muss man es bei der Auswahl der Gleichungen für die Grundflächenpaare so einrichten, dass die Rechnung in Ebenencoordinaten erspart bleibt, indem es dann möglich ist, die betreffenden Gleichungen durch einfache Vertauschungen von Indices herzuleiten. Bei Berücksichtigung dieser Gesichtspunkte ist es uns gelungen, die zwölf verschiedenen Fälle von Berührung in nur fünf verschiedene Gleichungsformen zu giessen. Für nur fünf Fälle werden desshalb

die Rechnungen eigens durchzuführen sein, für die übrigen brauchen aber bloss die Coeffizienten früherer Gleichungen spezialisirt zu werden.*)

Ich bemerke schliesslich noch, dass im Folgenden stets geschrieben wird:

$$a_{ik} = a_i\, a'_k + a_k\, a'_i,\quad \alpha_{ik} = \alpha_i\, \alpha'_k + \alpha_k\, \alpha'_i,\quad \text{also } a_{ii} = 2\, a_i\, a'_i,\quad \alpha_{ii} = 2\, \alpha'_i\, \alpha'_i,$$
$$\text{ferner } a'_{ik} = a_i\, a'_k - a_k\, a'_i,\quad \alpha'_{ik} = \alpha_i\, \alpha'_k - \alpha_k\, \alpha'_i.$$

§ 10. Der Complex, dessen Grundflächen sich in zwei Kegelschnitten treffen.

Wir wählen die Gleichungen der Grundflächen in der Form:

$$\left.\begin{aligned} S &\equiv a_1\, x_1^2 + a_2\, x_2^2 + a_3\, x_3^2 + a_3\, x_4^2 = 0, \quad S' \equiv a'_1\, x_1^2 + \ldots = 0; \\ \Sigma &\equiv \alpha_1\, \xi_1^2 + \alpha_2\, \xi_2^2 + \alpha_3\, \xi_3^2 + \alpha_3\, \xi_4^2 = 0, \quad \Sigma' \equiv \alpha'_1\, \xi_1^2 + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ liegt in dem Ebenenpaar $a'_{31}\, x_1^2 + a'_{32}\, x_2^2 = 0$, zerfällt also in zwei Kurven 2. Grads, welche zwei Punkte auf der Kante $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gemein haben. Diese Punkte sind als Doppelpunkte der Kurve $S = 0$, $S' = 0$ Berührungspunkte zwischen S und S'.

Die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ geht durch das Punktpaar $\alpha'_{31}\, \xi_1^2 + \alpha'_{32}\, \xi_2^2 = 0$, zerfällt also in zwei Kegel 2. Grads, welche zwei Ebenen durch die Kante $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ gemein haben. Diese Ebenen sind als Doppelebenen der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ Berührungsebenen zwischen Σ und Σ'.

$\xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$ sind die Berührungspunkte und daselbst $x_3^2 + x_4^2 = 0$ die Berührungsebenen sowohl zwischen S und S' als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare I. führen resp. zu den Complexen:

$$\left.\begin{aligned} O &\equiv a_{12}\, p_{12}^2 + a_{13}\, p_{13}^2 + a_{13}\, p_{14}^2 + a_{33}\, p_{34}^2 + a_{23}\, p_{42}^2 + a_{23}\, p_{23}^2 = 0, \\ \Omega &\equiv \alpha_{12}\, \pi_{12}^2 + \alpha_{13}\, \pi_{13}^2 + \alpha_{13}\, \pi_{14}^2 + \alpha_{33}\, \pi_{34}^2 + \alpha_{23}\, \pi_{42}^2 + \alpha_{23}\, \pi_{23}^2 = 0, \end{aligned}\right\} \text{1.}$$

welche wir als identisch betrachten wollen und daher voraussetzen:

$$\frac{a_{12}}{\alpha_{33}} = \frac{a_{13}}{\alpha_{23}} = \frac{a_{33}}{\alpha_{12}} = \frac{a_{23}}{\alpha_{13}}. \qquad \text{2.}$$

*) Die Gleichungsformen, welche Sylvester in Phil. magazine von 1851 p. 119 für die verschiedenen Fällen von Berührung zwischen Flächen 2. Grads angibt, waren aus den erwähnten Gründen für unsere Zwecke nicht brauchbar.

Als Gleichungen der Singularitätenfläche findet man:

$$[a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2 + a_{33}(x_3^2 + x_4^2)]\cdot[a_{12}(a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2) + a_{13}a_{23}(x_3^2 + x_4^2)] = 0,$$
$$[\alpha_{31}\xi_1^2 + \alpha_{32}\xi_2^2 + \alpha_{33}(\xi_3^2 + \xi_4^3)]\cdot[\alpha_{12}(\alpha_{31}\xi_1^2 + \alpha_{32}\xi_2^2) + \alpha_{13}\alpha_{23}(\xi_3^2 + \xi_4^2)] = 0. \quad 3.$$

Dieselbe zerfällt in zwei Flächen U und U′ vom 2. Grad, deren gemeinsame Kurve durch die Ebenenpaare $x_3^2 + x_4^2 = 0$ und $a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2 = 0$ und deren gemeinsame Enveloppe durch die Punktpaare $\xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$ und $\alpha_{31}\xi_1^2 + \alpha_{32}\xi_2^2 = 0$ bestimmt wird. U und U′ treffen sich daher in vier Kanten eines Tetraeders, dessen Ecken und Seiten Berührungspunkte resp. Berührungsebenen zwischen ihnen sind. Diese Kanten, Ecken und Seiten sind nicht nur für die Singularitätenfläche, sondern auch für deren Complex resp. Doppellinien, bilineare Doppelpunkte und bilineare Doppelebenen.

Die Ecken $\xi_i = 0$ schicken an die U resp. U′ die Kegel:

$$O_1 \equiv a_{12}x_2^2 + a_{13}(x_3^2 + x_4^2) = 0, \quad O_3 \equiv a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2 + a_{33}x_4^2 = 0,$$
$$O_2 \equiv a_{21}x_1^2 + a_{23}(x_3^2 + x_4^2) = 0, \quad O_4 \equiv a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$O_1' \equiv a_{23}x_2^2 + a_{33}(x_3^2 + x_4^2) = 0,$$
$$O_2' \equiv a_{13}x_1^2 + a_{33}(x_3^2 + x_4^2) = 0, \quad 4.$$
$$O_3' \equiv a_{12}(a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2) + a_{13}a_{23}x_4^2 = 0,$$
$$O_4' \equiv a_{12}(a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2) + a_{13}a_{23}x_3^2 = 0;$$

Die Seiten $x_i = 0$ treffen die U resp. U′ in den Kurven:

$$\Omega_1 \equiv \alpha_{12}\xi_2^2 + \alpha_{13}(\xi_3^2 + \xi_4^2) = 0, \quad \Omega_3 \equiv \alpha_{31}\xi_1^2 + \alpha_{32}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_4^2 = 0,$$
$$\Omega_2 \equiv \alpha_{21}\xi_1^2 + \alpha_{23}(\xi_3^2 + \xi_4^2) = 0, \quad \Omega_4 \equiv \alpha_{31}\xi_1^2 + \alpha_{32}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 = 0,$$
$$\Omega_1' \equiv \alpha_{23}\xi_2^2 + \alpha_{33}(\xi_3^2 + \xi_4^2) = 0,$$
$$\Omega_2' \equiv \alpha_{13}\xi_1^2 + \alpha_{33}(\xi_3^2 + \xi_4^2) = 0, \quad 5.$$
$$\Omega_3' \equiv \alpha_{12}(\alpha_{31}\xi_1^2 + \alpha_{32}\xi_2^2) + \alpha_{13}\alpha_{23}\xi_4^2 = 0,$$
$$\Omega_4' \equiv \alpha_{12}(\alpha_{31}\xi_1^2 + \alpha_{32}\xi_2^2)) + \alpha_{13}\alpha_{23}\xi_3^2 = 0.$$

Der Complex $p_{12}p_{34} = 0$ schneidet aus $O(\Omega)$ dessen singulären Linien aus. Er besteht aus zwei speziellen Complexen, welche die Tetraederkanten p_{12} und p_{34} zu Direktricen haben. Daher sind alle die p_{12} oder p_{34} treffende Complexlinien singuläre Linien; sie bilden zwei Congruenzen 2. Grads. In der That ist der Complexkegel in einem Punkt auf p_{12} oder p_{34} Tangentialkegel an U resp. U′ und die Complexkurve in einer Ebene durch p_{12} oder p_{34}

ist Schnittkurve mit U resp. U′.*) Der Complexkegel, dessen Spitze auf p_{12} oder p_{34} fortschreitet, umhüllt dieselbe Fläche U resp. U′, welche die Complexkurve erzeugt, deren Ebene sich um diese Kante dreht. Kommt die Kegelspitze in einen Doppelpunkt oder die Kurve in eine Doppelebene zu liegen, so degenerirt der Complexkegel in die Berührungsebene und die Complexkurve in den Berührungspunkt zwischen U und U′. Für einen Doppelpunkt und eine Doppelebene also, welche beide durch dieselben zwei Doppellinien bestimmt werden, degeneriren der Complexkegel und die Complexkurve in den nämlichen Strahlenbüschel von singulären Linien.

Die singulären Ebenen durch einen Punkt x auf p_{12} umhüllen ausser dem Complexkegel U_x noch den Kegel U'_x. Jede Ebene von U_x hat zur entsprechenden singulären Linie ihre Berührungslinie mit U_x, d. h. als die Punkte, welche ihre Complexkurve ausmachen, die Schnittpunkte dieser Linie mit U′; jede Ebene von U'_x hat aber zur entsprechenden singulären Linie ihre Schnittlinie mit der Polare von x für U′, d. h. als die Punkte, welche ihre Complexkurve ausmachen, die Schnittpunkte dieser Linie mit U. Die singulären Punkte in einer Ebene ξ durch p_{12} beschreiben ausser der Complexkurve U_ξ noch die Kurve U'_ξ. Jeder Punkt von U_ξ hat zur entsprechenden singulären Linie seine Tangente an U_ξ, d. h. als Ebenen, welche seinen Complexkegel ausmachen, die Tangentialebenen durch diese Linie an U′; jeder Punkt von U_ξ hat aber zur entsprechenden singulären Linie seine Verbindungslinie mit dem Pol von ξ für U′, d. h. als Ebenen, welche seinen Complexkegel ausmachen, die Tangentialebenen durch diese Linie an U. Das Analoge gilt für die Kante p_{34}, nur dass dann U und U′ ihre Rollen vertauschen. Von den Kanten p_{12} und p_{34} ist die eine die Polare der andern für den Complex O (Ω).

§ 11. Die Grundflächenkette des vorigen Complexes I.

Jede Fläche $a_1\ x_1^2 + a_2\ x_2^2 + a_3\ x_3^2 + a_4\ x_4^2 = 0$ oder $\alpha_1\ \xi_1^2 + \alpha_2\ \xi_2^2 + \alpha_3\ \xi_3^2 + \alpha_4\ \xi_4^2 = 0$, welche Grundfläche des letzten Complexes sein soll, muss zu Folge 3. und 4. in § 3 die Relationen befriedigen:

---

*) Man erkennt nun die Idendität des erhaltenen Complexes mit dem Complex 3. oder [11(11)(11)] in Weiler's Abhandlung: „Ueber die verschiedenen Gattungen des Complexes 2. Grads". Math. Ann. Bd. 7 p. 160.

Derselbe Complex findet sich auch in der Arbeit von Segre und Loria: „Sur les differentes espèces de complexes du 2⁰ dégré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre". Math. Ann. Bd. 23 p. 226.

$$(a_3 - a_4)(a_1 a_{23} - a_2 a_{13}) = 0,\ a_2(a_1 a_{33} - a_4 a_{13}) = a_3(a_1 a_{23} - a_4 a_{12})$$
$$(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_1 \alpha_{23} - \alpha_2 \alpha_{13}) = 0,\ \alpha_2(\alpha_1 \alpha_{33} - \alpha_4 \alpha_{13}) = \alpha_3(\alpha_1 \alpha_{23} - \alpha_4 \alpha_{12}) \quad 1.$$

Daraus ergeben sich zwei verschiedene Schaaren von Grundflächen. In Punkt- resp. Ebenencoordinaten wird die erste Schaar repräsentirt durch:

$$S \equiv k\ x_1^2 + \frac{k\ a_{23} - a_{12}}{k\ a_{33} - a_{13}} x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$
$$\Sigma \equiv \varkappa\ \xi_1^2 + \frac{\varkappa\ \alpha_{23} - \alpha_{12}}{\varkappa\ \alpha_{33} - \alpha_{13}} \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^3 = 0, \quad 2.$$

Die zweite Schaar durch:

$$S \equiv a_{13}\ x_1^2 + a_{23}\ x_2^2 + \frac{a_{13}\ a_{23}\ (k - a_{33})}{k\ a_{12} - a_{13}\ a_{23}} x_3^2 + k\ x_4^2 = 0,$$
$$\Sigma \equiv \alpha_{13}\ \xi_1^2 + \alpha_{23}\ \xi_2^2 + \frac{\alpha_{13}\ \alpha_{23}\ (\varkappa - \alpha_{33})}{\varkappa\ \alpha_{12} - \alpha_{13}\ \alpha_{23}} \xi_3^2 + \varkappa\ \xi_4^2 = 0. \quad 3.$$

k und $\varkappa$ bedeuten hier, wie immer in der Folge, veränderliche Parameter. Was dann die Parameter k′ oder $\varkappa'$ der in erster resp. in zweiter Art entsprechenden und die Parameter $\bar{k}$ oder $\bar{\varkappa}$ der zugeordneten Flächen betrifft, so findet man:

In der ersten Schaar entsprechen sich S und S′ in erster Art wenn $k + k' = \frac{2\ a_{13}}{a_{33}}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\ \alpha_{13}}{\alpha_{33}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\ \bar{k} = \frac{a_{12}\ a_{13}}{a_{23}\ a_{33}}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\ \bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{12}\ \alpha_{13}}{\alpha_{23}\ \alpha_{23}}$ sich zugeordnet.

In der zweiten Schaar entsprechen sich S und S′ in erster Art wenn $k + k' = \frac{2\ a_{13}\ a_{23}}{a_{12}}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\ \alpha_{13}\ \alpha_{23}}{\alpha_{12}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\ \bar{k} = \frac{a_{13}\ a_{23}\ a_{33}}{a_{12}}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\ \bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{13}\ \alpha_{23}\ \alpha_{33}}{\alpha_{12}}$ sich zugeordnet.

Wie die Grundflächen selbst und wie die zweierlei Kurven- und Enveloppenschaaren hier auf der Singularitätenfläche liegen, geht aus Folgendem hervor:

Zwischen sämmtlichen Flächen der ersten Schaar sind die Doppelpunkte $\xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$ Berührungspunkte und daselbst die Doppelebenen

$x_3^2 + x_4^2 = 0$ Berührungsebenen, zu ihr gehören auch die Flächenpaare, von denen wir in § 10 ausgingen. Das Ebenenpaar

$$(a_{33}\ k - a_{13})^2\ x_1^2 + (a_{13}\ a_{23} - a_{12}\ a_{33})\ x_2^2 = 0$$

trifft die U in der von singulären Linien umhüllten Kurve $S = 0$, $S' = 0$, das Punktpaar

$$(\alpha_{33}\ \varkappa - \alpha_{13})^2\ \xi_1^2 + (\alpha_{13}\ \alpha_{23} - \alpha_{12}\ \alpha_{33})\ \xi_2^2 = 0$$

schickt an die U′ die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$; dagegen kommen weder der Kurve $S = 0$, $\bar{S} = 0$, in der das Ebenenpaar

$$a_{13}\ (a_{12} - k\ a_{23})\ (a_{13} - k\ a_{33})\ x_1^2 + k\ (a_{13}\ a_{23} - a_{12}\ a_{33})\ x_2^2 = 0$$

die U′ trifft, noch der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\bar{\Sigma} = 0$, welche das Punktpaar

$$\alpha_{13}\ (\alpha_{12} - \varkappa\ \alpha_{23})\ (\alpha_{13} - \varkappa\ \alpha_{33})\ \xi_1^2 + \varkappa\ (\alpha_{13}\ \alpha_{23} - \alpha_{12}\ \alpha_{33})\ \xi_2^2 = 0$$

an die U schickt, singuläre Linien zu.

Zwischen sämmtlichen Flächen der zweiten Schaar sind die Doppelpunkte $\alpha_{13}\ \xi_1^2 + \alpha_{23}\ \xi_2^2 = 0$ Berührungspunkte und daselbst die Doppelebenen $a_{13}\ x_1^2 + a_{23}\ x_2^2 = 0$ Berührungsebenen. Das Ebenenpaar

$$a_{13}\ a_{23}\ (a_{13}\ a_{23} - a_{12}\ a_{33})\ x_3^2 + (a_{12}\ k - a_{13}\ a_{23})\ x_4^2 = 0$$

trifft die U′ in der von singulären Linien umhüllten Kurve $S = 0$, $S' = 0$, das Punktpaar

$$\alpha_{13}\ \alpha_{23}\ (\alpha_{13}\ \alpha_{23} - \alpha_{12}\ \alpha_{33})\ \xi_3^2 + (\alpha_{12}\ \varkappa - \alpha_{13}\ \alpha_{23})\ \xi_4^2 = 0$$

schickt an die U die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$, dagegeu kommen weder der Kurve $S = 0$, $\bar{S} = 0$, in der das Ebenenpaar

$$k\ (a_{13}\ a_{23} - a_{12}\ a_{33})\ x_3^2 + (k - a_{33})\ (k\ a_{12} - a_{13}\ a_{33})\ x_4^2 = 0$$

die U trifft, noch der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma = 0$, welche das Punktpaar

$$\varkappa\ (\alpha_{13}\ \alpha_{23} - \alpha_{12}\ \alpha_{33})\ \xi_3^2 + (\varkappa - \alpha_{33})\ (\varkappa\ \alpha_{12} - \alpha_{13}\ \alpha_{33})\ \xi_4^2 = 0$$

ān die U′ schickt, singuläre Linien zu.

Jede der beiden Flächenschaaren umfasst zwei völlig getrennte Kettentheile, so dass wir auch hier wieder vier Kettentheile erhalten. Jeder solche Theil bricht mit einem Kegel und einer Kurve 2. Grads ab und kehrt bei einer sich selbst zugeordneten Fläche um. In der That besitzt die erste Schaar die Complexkegel O_1 und O_2 die Complexkurven Ω_1 und Ω_2 und zwei Flächen, von denen jede sich selbst zugeordnet ist, mit den Parametern

$$k = \pm \sqrt{\frac{a_{12}\ a_{13}}{a_{23}\ a_{33}}} \text{ resp. } \varkappa = \pm \sqrt{\frac{\alpha_{12}\ \alpha_{13}}{\alpha_{23}\ \alpha_{33}}};$$

die zweite Schaar dagegen besitzt die Complexkegel O_3 und O_4, die Complexkurven Ω_3 und Ω_4 und zwei Flächen, von denen jede sich selbst zugeordnet ist, mit den Parametern

$$k = \pm \sqrt{\frac{a_{13}\ a_{23}\ a_{33}}{a_{12}}} \text{ resp. } \varkappa = \pm \sqrt{\frac{\alpha_{13}\ \alpha_{23}\ \alpha_{33}}{\alpha_{12}}}.$$

Es existirt aber hier ein Grundflächenpaar, welches zu dem Complex in ausgezeichneter Beziehung steht, nämlich die Fläche:

$$\begin{aligned} a_{12}\ (a_{13}\ x_1^2 + a_{23}\ x_2^2) + s_1\ (x_3^2 + x_4^2) &= 0, \\ \alpha_{12}\ (\alpha_{13}\ \xi_1^2 + \alpha_{23}\ \xi_2^2) + s_2\ (\xi_3^2 + \xi_3^2) &= 0 \end{aligned} \qquad 4.$$

und die Fläche:

$$\begin{aligned} a_{12}\ (a_{13}\ x_1^2 + a_{23}\ x_2^2) + s_2\ (x_3^2 + x_4^2) &= 0, \\ \alpha_{12}\ (\alpha_{13}\ \xi_1^2 + \alpha_{23}\ \xi_2^2) + s_1\ (\xi_3^2 + \xi_4^2) &= 0, \end{aligned} \qquad 5.$$

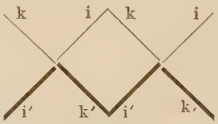
$$\text{wo } \left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} a_{13}\ a_{23} \pm \sqrt{a_{13}\ a_{23}\ (a_{13}\ a_{23} - a_{12}\ a_{33})} \\ \alpha_{13}\ \alpha_{23} \pm \sqrt{\alpha_{13}\ \alpha_{23}\ (\alpha_{13}\ \alpha_{23} - \alpha_{12}\ \alpha_{33})}. \end{matrix}$$

Diese Flächen haben die merkwürdige Eigenschaft, dass sie sich in erster und zugleich in zweiter Art entsprechen, also den Complex zugleich auf zwei reciproke Weisen erzeugen. Sie sind sich aber zu gleicher Zeit auch zugeordnet, so dass sie ein völlig isolirtes Glied der Grundflächenkette bilden.*) Die singulären Linien ihrer gemeinsamen Kurve sowohl als Enveloppe sind die vier Strahlenbüschel, welche die Complexkegel in den Doppelpunkten und zugleich die Complexkurven in den Doppelebenen ausmachen; beide Flächen treffen sich nämlich in den vier Doppellinien. Jede Ebene durch eine Doppellinie hat offenbar zur Complexkurve ihre beiden Berührungspunkte mit diesen Flächen und jeder Punkt auf einer Doppellinie hat zum Complexkegel seine beiden Berührungsebenen an dieselben Flächen.

Der zweite Complex,**) welcher die gleiche Singularitätenfläche aber eine andere Grundflächenkette besitzt, ist hier:

---

*) Die graphische Darstellung eines solchen von den Flächen i (i′) und k (k′) gebildetex Gliedes ist nämlich:



**) Vgl. Segre und Loria, Math. Ann. Bd. 23 p. 226.

$$O' \equiv \frac{p_{12}^2}{a_{33}} + \frac{p_{13}^2}{a_{23}} + \frac{p_{14}^2}{a_{23}} + \frac{p_{34}^2}{a_{12}} + \frac{p_{42}^2}{a_{13}} + \frac{p_{23}^2}{a_{13}} = 0,$$

$$\Omega' \equiv \frac{\pi_{12}^2}{\alpha_{33}} + \frac{\pi_{13}^2}{\alpha_{23}} + \frac{\pi_{14}^2}{\alpha_{28}} + \frac{\pi_{34}^2}{\alpha_{12}} + \frac{\pi_{42}^2}{\alpha_{13}} + \frac{\pi_{23}^2}{\alpha_{13}} = 0. \qquad 6.$$

Von seiner Kette wird die erste Schaar repräsentirt durch:

$$S \equiv k\, x_1^2 + \frac{a_{12}\, a_{23}\, (k\, a_{33} - a_{13})}{a_{13}\, a_{33}\, (k\, a_{23} - a_{12})} x_2^2 + x_3^3 + x_4^2 = 0,$$

$$\Sigma \equiv \varkappa\, \xi_1^2 + \frac{\alpha_{12}\, \alpha_{23}\, (\varkappa\, \alpha_{33} - \alpha_{13})}{\alpha_{13}\, \alpha_{33}\, (\varkappa\, \alpha_{23} - \alpha_{12})} \xi_2^2 + \xi_3^3 + \xi_4^2 = 0, \qquad 7.$$

die andere durch:

$$S \equiv a_{13}\, x_1^2 + a_{23}\, x_2^2 + \frac{a_{13}\, a_{23}\, a_{33}\, (k\, a_{12} - 1)}{a_{12}\, (k\, a_{13}\, a_{23} - a_{33})} x_3^2 + a_{13}\, a_{23}\, k\, x_4^2 = 0,$$

$$\Sigma \equiv \alpha_{13}\, \xi_1^2 + \alpha_{23}\, \xi_2^2 + \frac{\alpha_{13}\, \alpha_{23}\, \alpha_{33}\, (\varkappa\, \alpha_{12} - 1)}{\alpha_{12}\, (\varkappa\, \alpha_{13}\, \alpha_{23} - \alpha_{33})} \xi_3^2 + \alpha_{13}\, \alpha_{23}\, \varkappa\, \xi_4^2 = 0. \qquad 8.$$

In der ersten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = \frac{2\, a_{12}}{a_{23}}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\, \alpha_{12}}{\alpha_{23}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\, \bar{k} = \frac{a_{12}\, a_{13}}{a_{23}\, a_{33}}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\, \bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{12}\, \alpha_{13}}{\alpha_{23}\, \alpha_{33}}$ sich zugeordnet.

In der zweiten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = \frac{2\, a_{33}}{a_{13}\, a_{23}}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\, \alpha_{33}}{\alpha_{13}\, \alpha_{23}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ $k\, \bar{k} = \frac{a_{33}}{a_{12}\, a_{13}\, a_{23}}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\, \bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{12}\, \alpha_{13}\, \alpha_{23}}$ sich zugeordnet.

Für die Grundflächen des Complexes O′ (Ω') gelten überhaupt dieselben Sätze, wie sie für die von O (Ω) gefunden wurden, nur vertauschen die Theile U und U′ der Singularitätenfläche ihre Rollen. Auch deren Kette zerfällt in vier Theile, denn sie enthält die Kegel O_i', die Kurven Ω_i' und vier sich selbst zugeordnete Flächen. Letztere vier Flächen sind identisch mit jenen, die auch für O (Ω) sich selbst zugeordnet sind; es sind ausser den $\xi_i^2 = 0$ und $x_i^2 = 0$ die einzigen Flächen, welche Grundflächen für beide Complexe zugleich sind.

§ 12. Allgemeine Betrachtung einer Grundflächenschaar.

Wie bei letzterem Complex werden auch in allen folgenden Fällen Schaaren von Grundflächen auftreten, von denen jede durch eine Gleichung mit veränderlichem Parameter k oder $\varkappa$ repräsentirt wird. Für jede Fläche S, Σ mit gegebenem Parameter k, $\varkappa$ kann man dann immer den Parameter k' für die in erster Art entsprechende S', den Parameter $\varkappa'$ für die in zweiter Art entsprechende Σ' und die Parameter $\overline{k}$ oder $\overline{\varkappa}$ für die zugeordneten $\overline{S}$ oder $\overline{\Sigma}$ finden.

Wir betrachten jetzt allgemein eine Flächenschaar, wie sie in § 11 und bei vielen der folgenden Complexe auftritt. In derselben entsprechen sich stets S und S' für $k + k' = a$, Σ und Σ' für $\varkappa + \varkappa' = \alpha$, dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k\ \overline{k} = b$, Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa\ \overline{\varkappa} = \beta$ sich zugeordnet, wo a, α, b, β bekannte, von den Coeffizienten des Complexes abhängige Grössen vorstellen. Jede solche Schaar umfasst zwei völlig getrennte Kettentheile, denn sie enthält stets zwei Kegel und und zwei Kurven 2. Grads, bei denen — wie wir wissen — die Kette abricht, und ausserdem allemal zwei Flächen, von denen jede sich selbst zugeordnet ist, bei welchen also die Kettentheile umkehren. Den letzteren zwei Flächen kommen die Parameter $k = \pm\sqrt{b}$ oder $\varkappa = \pm\sqrt{\beta}$ zu, je nachdem man ihre Gleichungen in Punkt- oder Ebenencoordinaten wünscht. Ausser den beiden Kettentheilen besitzt eine solche Flächenschaar noch ein völlig isolirtes Kettenglied, das aber nur zwei Flächen umfasst; dieselben entsprechen sich nämlich zugleich in zweifacher Art und sind sich dabei noch zugeordnet. Die zwei Flächen eines solchen isolirten Gliedes erzeugen also den Complex stets auf zwei reciproke Weisen. Ihre Parameter, welche sich aus

$$s_1 + s_2 = a, \quad s_1\ s_2 = b \text{ oder aus } \sigma_1 + \sigma_2 = \alpha, \quad \sigma_1\ \sigma_2 = \beta$$

ergeben sind:

$$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right) \text{ oder } \left.\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right), \quad 1.$$

je nachdem man die Gleichungen in Punkt- oder Ebenencoordinaten wünscht.

Wenn die Parameter k, $\varkappa$ für irgend eine Fläche S, Σ gegeben sind, so kann man für jede Fläche, welche in der graphischen Darstellung der Kette beliebig weit von S, Σ entfernt ist, den Parameter in der Form eines Kettenbruches finden.

Schreiben wir nämlich die Parameter für die Flächen, wie sie in der graphischen Darstellung der Kette successive aufeinander folgen: k_1 für die der S in erster Art entsprechende S_1, k_2 für die der S_1 zugeordnete S_2, k_3 für die der S_2 in erster Art entsprechende S_3, u. s. w. oder: $\varkappa_1$ für die der Σ in zweiter Art entsprechende Σ_1, $\varkappa_2$ für die der Σ_1 zugeordnete Σ_2, $\varkappa_3$ für die der Σ_2 in zweiter Art entsprechende Σ_3, u. s. w., so hat man:

$$k + k_1 = s_1 + s_2,\ k_1 k_2 = s_1 s_2,\ k_2 + k_3 = s_1 + s_2, \ldots$$
$$k_{2n-1} k_{2n} = s_1 s_2,\ k_{2n} + k_{2n+1} = s_1 + s_2,$$

$$\varkappa + \varkappa_1 = \sigma_1 + \sigma_2,\ \varkappa_1 \varkappa_2 = \sigma_1 \sigma_2,\ \varkappa_2 + \varkappa_3 = \sigma_1 + \sigma_2, \ldots$$
$$\varkappa_{2n-1} \varkappa_{2n} = \sigma_1 \sigma_2,\ \varkappa_{2n} + \varkappa_{2n+1} = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Daraus ergibt sich, dass den Flächen S_{2n+1}, S_{2n}, Σ_{2n+1}, Σ_{2n} resp. die Parameter zukommen:

$$k_{2n+1} = s_1 + s_2 - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} - \frac{s_1 s_2}{\ldots} - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2 - k},$$

$$k_{2n} = s_1 + s_2 - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} - \frac{s_1 s_2}{\ldots} - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} - \frac{s_1 s_2}{k},$$

$$\varkappa_{2n+1} = \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\ldots} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 - \varkappa}, \qquad 2.$$

$$\varkappa_{2n} = \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\ldots} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_1} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\varkappa}.$$

Drückt man nun die Bedingungen aus, unter denen k_{2n+1} mit k oder $\varkappa_{2n+1}$ mit $\varkappa$ identisch werden, so erhalten wir stets Gleichungen 2. Grads in k oder $\varkappa$, welchen Werth wir auch dem n beilegen, d. h. für jeden Werth von n kommt es stets zweimal vor, dass S mit S_{2n+1} oder Σ mit Σ_{2n+1} identisch wird. In der That, es müssen stets zwei Flächen, welche von der einen oder andern der beiden sich selbst zugeordneten Flächen in der graphischen Darstellung gleichweit entfernt sind, identisch werden.

Anders gestaltet sich dagegen die Sache, wenn wir die Bedingungen ausdrücken, unter denen k mit k_{2n} oder $\varkappa$ mit $\varkappa_{2n}$ identisch werden. Dadurch erhalten wir nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(k^2 - a\,k + b)\,(s_1^{n-1} + s_1^{n-2}\,s_2 + s_1^{n-3}\,s_2^2 + \ldots + s_1\,s_2^{n-2} + s_2^{n-1}) &= 0,\\ (\varkappa^2 - \alpha\,\varkappa + \beta)\,(\sigma_1^{n-1} + \sigma_1^{n-2}\,\sigma_2 + \sigma_1^{n-3}\,\sigma_2^2 + \ldots + \sigma_1\,\sigma_2^{n-2} + \sigma_2^{n-1}) &= 0.\end{aligned} \qquad 3.$$

Die sich hieraus ergebenden Wurzeln für k oder $\varkappa$ sind die Ausdrücke 1. und man erkennt daher, dass es, abgesehen von den zwei ausgezeichneten Flächen, welche das isolirte Glied bilden, im Allgemeinen nie vorkommt, das S mit S_{2n} oder Σ mit Σ_{2n} identisch wird.

Verschwindet aber in der einen oder anderen der Gleichungen 3. der eingeklammerte Ausdruck, so werden für jeden Werth von k resp. $\varkappa$, d. h. von welcher Fläche S, Σ man auch in der Kette ausgehen mag, jedesmal die Flächen S_{2n} und Σ_{2n} mit S, Σ identisch. Mit andern Worten — im Hinblick auf die Zerlegung der Kette in Glieder — die Flächenkette löst sich dann derart in lauter Ringe von je n Gliedern auf, dass jedesmal das n^{te} Glied mit dem ersten identisch wird. Die Klammerausdrücke in 3. sind identisch mit

$$\frac{s_1^n - s_2^n}{s_1 - s_2} \text{ resp. } \frac{\sigma_1^n - \sigma_2^n}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

so dass $s_1^n - s_2^n = 0$ oder $\sigma_2^n - \sigma_2^n = 0$ als die Bedingungsgleichung für das Zerfallen der Kette in Ringe von je n Gliedern angesehen werden kann, unter der Voraussetzung, dass $s_1 - s_2 = \sqrt{a^2 - 4\,b}$ und $\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\alpha^2 - 4\,\beta}$ nicht verschwinden dürfen.

Wir erhalten so den interessanten Satz:

Eine solche Grundflächenkette löst sich in lauter Ringe von je n Gliedern auf, sobald zwischen den Coeffizienten des Complexes die eine oder die andere der Relationen besteht:

$$\begin{aligned}(a + \sqrt{a^2 - 4\,b})^n &= (a - \sqrt{a^2 - 4\,b})^n,\\ (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\,\beta})^n &= (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\,\beta})^n.\end{aligned} \qquad 4.$$

Diese Kette kann sich aber nicht in Ringe von je einem Glied d. h. in lauter isolirte Glieder von je zwei Flächen auflösen, da $a^2 - 4b$ oder $\alpha^2 - 4\beta$ nicht verschwinden können. Die reinen, von letzteren Faktoren befreite Gleichungen werden daher richtiger in den Reihen geschrieben:

$$\begin{aligned} &\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} (a^2 - 4b) + \binom{n}{5} a^{n-5} (a^2 - 4b)^2 + \ldots = 0, \\ &\binom{n}{1} \alpha^{n-1} + \binom{n}{3} \alpha^{n-3} (\alpha^2 - 4\beta) + \binom{n}{5} \alpha^{n-5} (\alpha^2 - 4\beta)^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \quad 5.$$

Die Reihen sind so lange fortzusetzen, bis die Potenz von a resp. α zu 1 oder 0 wird.

Die Kette löst sich also auf:

1) in Ringe von je 2 Gliedern für $a = 0$;
2) in Ringe von je 3 Gliedern $a^2 - b = 0$;
3) in Ringe von je 4 Gliedern für $a^3 - 2ab \equiv a(a^2 - 2b) = 0$, d. h. für $a^2 - 2b = 0$, da $a = 0$ das Auflösen in Ringe von je 2 Gliedern bedingt;
4) in Ringe von je 5 Gliedern für $a^4 - 3a^2 b + b^2 = 0$;
5) in Ringe von je 6 Gliedern für $a^5 - 4a^3 b + 3ab^2 \equiv a(a^2 - b)(a^2 - 3b) = 0$, d. h. für $a^2 - 3b = 0$, da $a^2 - b = 0$ das Auflösen in Ringe von je 3 Gliedern nach sich zieht;
6) in Ringe von je 7 Gliedern für $a^6 - 5a^4 b + 6a^2 b^2 - b^3 = 0$;
7) in Ringe von je 8 Gliedern für $a^7 - 6a^5 b + 10a^3 b^2 - 4ab^3 \equiv a(a^2 - 2b)(a^4 - 4a^2 b + 2b^2) = 0$, d. h. da für $a^2 - 2b = 0$ sich Ringe von je 4 Gliedern bilden, für $a^4 - 4a^2 b + 2b^2 = 0$;
8) in Ringe von je 9 Gliedern für $a^8 - 7a^6 b + 15a^4 b^2 - 10a^2 b^3 + b^4 \equiv (a^2 - b)(a^6 - 6a^4 b + 9a^2 b - b^3) = 0$, d. h. für $a^6 - 6a^4 b + 9a^2 b - b^3 = 0$;
9) in Ringe von je 10 Gliedern für $a^9 - 8a^7 b + 21a^5 b^2 - 20a^3 b^3 + 5ab^4 \equiv a(a^4 - 3a^2 b + b^2)(a^4 + 5a^2 b + 5b^2) = 0$, d. h. für $a^4 - 5a^2 b + 5b^2 = 0$;
10) in Ringe von je 11 Gliedern für $a^{10} - 9a^8 b + 28a^6 b^2 - 35a^4 b^3 + 15a^2 b^4 - b^5 = 0$;
11) in Ringe von je 12 Gliedern für $a^{11} - 10a^9 b + 36a^7 b^2 - 56a^5 b^3 + 35a^3 b^4 - 6ab^5 \equiv a(a^2 - b)(a^2 - 2b)(a^2 - 3b)(a^4 - 4a^2 b + b^2) = 0$, d. h. für $a^4 - 4a^2 b + b^2 = 0$,

da die übrigen Faktoren gleich Null gesetzt das Auflösen in Ringe von resp. 2, 3, 4 und 6 Gliedern bedingen.

Folgende Tafel stellt also die Bedingungen für das Zerfallen der Kette in Ringe von je 2, 3, 4, . . . 12 Gliedern dar:

$$
\begin{aligned}
&a = 0,\\
&a^2 - b = 0,\\
&a^2 - 2\,b = 0,\\
&a^4 - 3\,a^2\,b + b^2 = 0,\\
&a^2 - 3\,b = 0,\\
&a^6 - 5\,a^4\,b + 6\,a^2\,b^2 - b^3 = 0,\\
&a^4 - 4\,a^2\,b + 2\,b^2 = 0,\\
&a^6 - 6\,a^4\,b + 9\,a^2\,b^2 - b^3 = 0,\\
&a^4 - 5\,a^2\,b + 5\,b^2 = 0,\\
&a^{10} - 9\,a^8\,b + 28\,a^6\,b^2 - 35\,a^4\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 - b^5 = 0,\\
&a^4 - 4\,a^2\,b + b^2 = 0.
\end{aligned}
\qquad 6.
$$

Was nun die in § 11 betrachteten Flächenschaaren der Complexe O (Ω) und O′ (Ω') betrifft, so findet man durch Einsetzen der speziellen Werthe

$$a = \frac{2\,a_{13}}{a_{33}},\quad b = \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}\,a_{33}},\quad \alpha = \frac{2\,\alpha_{13}}{\alpha_{33}},\quad \beta = \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{13}}{\alpha_{23}\,\alpha_{33}},\ \text{resp.}$$

$$a = \frac{2\,a_{13}\,a_{23}}{a_{12}},\ b = \frac{a_{13}\,a_{23}\,a_{33}}{a_{12}},\ \alpha = \frac{2\,\alpha_{13}\,\alpha_{13}}{\alpha_{12}},\ \beta = \frac{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{33}}{\alpha_{12}}$$

in die Relationen 4.:

Die Flächenkette von O (Ω) löst sich in Ringe von je n Gliedern auf, wenn

$$(\sqrt{a_{13}a_{23}} + \sqrt{a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}})^n = (\sqrt{a_{13}a_{23}} - \sqrt{a_{13}a_{23} - a_{12}a_{23}})^n$$

oder 7.

$$(\sqrt{\alpha_{13}\alpha_{23}} + \sqrt{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}})^n = (\sqrt{\alpha_{13}\alpha_{23}} - \sqrt{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}})^n;$$

die Flächenkette von O′ (Ω') löst sich in Ringe von je n Gliedern auf, wenn:

$$(\sqrt{a_{12}a_{33}} + \sqrt{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}})^n = (\sqrt{a_{12}a_{33}} - \sqrt{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}})^n$$

oder 8.

$$(\sqrt{\alpha_{12}\alpha_{33}} + \sqrt{\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{23}})^n = (\sqrt{\alpha_{12}\alpha_{33}} - \sqrt{\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{23}})^n.$$

Diese Relationen lassen sich aber mit Rücksicht auf 6. für spezielle Werthe von n noch sehr reduziren.

§ 13. Der Complex, dessen Grundflächen sich in zwei Linienpaaren treffen.

Die Gleichungen solcher Grundflächen nehmen wir in den Formen an:

$$\begin{aligned} S &\equiv a_1 x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_2 x_3^2 + a_2 x_4^2 = 0, \quad S' \equiv a_1' x_1^2 + \ldots = 0; \\ \Sigma &\equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_1 \xi_2^2 + \alpha_2 \xi_3^2 + \alpha_2 \xi_4^2 = 0, \quad \Sigma' \equiv \alpha_1' \xi_1^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \qquad \text{II.}$$

Die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ wird durch die Ebenenpaare $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und $x_3^2 + x_4^2 = 0$ bestimmt, zerfällt also in zwei Paare von Punktreihen. Jene Ebenenpaare bilden die Seiten und diese Punktreihen vier Kanten eines Tetraeders, dessen Ecken Berührungspunkte zwischen S und S′ sind.

Die Envelope $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ wird durch die Punktpaare $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ und $\xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$ bestimmt, zerfällt also in zwei Paare von Ebenenbüscheln. Jene Punktpaare bilden die Ecken und diese Ebenenbüschel vier Kanten eines Tetraeders, dessen Seiten Berührungsebenen zwischen Σ und Σ' sind.

$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ und $\xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$ sind die Berührungspunkte und daselbst $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und $x_3^2 + x_4^2 = 0$ die Berührungsebenen sowohl zwischen S und S′ als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare II. führen resp. zu den Complexen:

$$\begin{aligned} O &\equiv a_{11} p_{12}^2 + a_{12} p_{13}^2 + a_{12} p_{14}^2 + a_{22} p_{34}^2 + a_{12} p_{42}^2 + a_{12} p_{23}^2 = 0, \\ \Omega &\equiv \alpha_{11} \pi_{12}^2 + \alpha_{12} \pi_{13}^2 + \alpha_{12} \pi_{14}^2 + \alpha_{22} \pi_{34}^2 + \alpha_{12} \pi_{42}^2 + \alpha_{12} \pi_{23}^2 = 0, \end{aligned} \qquad \text{1.}$$

welche identisch werden, wenn

$$\frac{a_{11}}{\alpha_{22}} = \frac{a_{12}}{\alpha_{12}} = \frac{a_{22}}{\alpha_{11}}. \qquad \text{2.}$$

Als Gleichungen der Singularitätenfläche erhält man:

$$\begin{aligned} &[a_{12}(x_1^2 + x_2^2) + a_{22}(x_3^2 + x_4^2)] \cdot [a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{12}(x_3^2 + x_4^2)] = 0, \\ &[\alpha_{12}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \alpha_{22}(\xi_3^2 + \xi_4^2)] \cdot [\alpha_{11}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \alpha_{12}(\xi_3^2 + \xi_4^2)] = 0 \end{aligned} \qquad \text{3.}$$

Auch hier zerfällt also die Singularitätenfläche in zwei Flächen 2. Grads U und U′; der erhaltene Complex ist derselbe wie der in § 10 betrachtete, nur auf ein anderes Tetraeder bezogen. Wenn wir nämlich den Complex in § 10 statt durch ein beliebiges durch sein ausgezeichnetes Grundflächenpaar (§ 11, 4. und 5.) entstehen lassen, so erhalten wir sofort den gegenwärtigen Complex. In der

That sind die beiden Flächen, welche sich sowohl in zweifacher Art entsprechen als auch sich selbst zugeordnet sind, nämlich

$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + s_1(x_3^2 + x_4^2) = 0, \quad \alpha_{11}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + s_2(\xi_3^2 + \xi_4^2) = 0$ und
$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + s_2(x_3^2 + x_4^2) = 0, \quad \alpha_{11}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + s_1(\xi_3^2 + \xi_4^2) = 0$

$\left(\text{wo } \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}}\Big)$ identisch sowohl mit S und S′ als auch mit Σ und Σ', von denen wir eben ausgegangen sind.

Was die übrigen Grundflächen des Complexes 1. betrifft, so bleiben für sie die in § 11 gefundenen Resultate giltig, nur ihre Gleichungen nehmen einfachere Formen an. Die erste Schaar wird repräsentirt durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv k\,x_1^2 + \frac{k\,a_{12} - a_{11}}{k\,a_{22} - a_{12}}\,x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \\ \Sigma &\equiv \varkappa\,\xi_1^2 + \frac{\varkappa\,\alpha_{12} - \alpha_{11}}{\varkappa\,\alpha_{22} - \alpha_{12}}\,\xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0. \end{aligned} \qquad 4.$$

Es entsprechen sich in ihr S und S′ in erster Art, wenn $k + k' = \frac{2\,a_{12}}{a_{22}}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\,\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k} = \frac{a_{11}}{a_{22}}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}$ sich zugeordnet.

Die zweite Schaar wird repräsentirt durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv a_{12}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{a_{12}^2(k - a_{22})}{k\,a_{11} - a_{12}^2}\,x_3^2 + k\,x_4^2 = 0, \\ \Sigma &\equiv \alpha_{12}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{\alpha_{12}^2(\varkappa - \alpha_{22})}{\varkappa\,\alpha_{11} - \alpha_{12}^2}\,\xi_3^2 + k\,\xi_4^2 = 0. \end{aligned} \qquad 5.$$

Es entsprechen sich in ihr S und S′ in erster Art, wenn $k + k' = \frac{2\,a_{12}^2}{a_{11}}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\,\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k} = \frac{a_{12}^2\,a_{22}}{a_{11}}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{12}^2\,\alpha_{22}}{\alpha_{11}}$ sich zugeordnet.

Die Kette von O (Ω) löst sich nach 4. in § 12 in Ringe von je n Gliedern auf, wenn:

$$(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}})^n = (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}})^n \qquad 6.$$

Der zweite Complex, welcher die gleiche Singularitätenfläche besitzt, ist:

$$\begin{aligned} O' &\equiv \frac{p_{12}^2}{a_{22}} + \frac{p_{13}^2}{a_{12}} + \frac{p_{14}^2}{a_{12}} + \frac{p_{34}^2}{a_{11}} + \frac{p_{42}^2}{a_{12}} + \frac{p_{23}^2}{a_{12}} = 0, \\ \Omega' &\equiv \frac{\pi_{12}^2}{\alpha_{22}} + \frac{\pi_{13}^2}{\alpha_{12}} + \frac{\pi_{14}^2}{\alpha_{12}} + \frac{\pi_{34}^2}{\alpha_{11}} + \frac{\pi_{42}^2}{\alpha_{12}} + \frac{\pi_{23}^2}{\alpha_{12}} = 0. \end{aligned} \qquad 7.$$

Was die Grundflächenkette des letzteren betrifft, so wird die erste Schaar repräsentirt durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv k\, x_1^2 + \frac{a_{11}(k\, a_{22} - a_{12})}{a_{22}(k\, a_{12} - a_{11})} x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \\ \Sigma &\equiv \varkappa\, x_1^2 + \frac{\alpha_{11}(\varkappa\, \alpha_{22} - \alpha_{12})}{\alpha_{22}(\varkappa\, \alpha_{12} - \alpha_{11})} \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0, \end{aligned} \qquad 8.$$

die zweite Schaar durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv a_{12}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{a_{12}^2 a_{22}(k\, a_{11} - 1)}{a_{11}(k\, a_{12}^2 - a_{22})} x_3^2 + a_{12}^2\, k\, x_4^2 = 0, \\ \Sigma &\equiv \alpha_{12}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{\alpha_{12}^2 \alpha_{22}(\varkappa\, \alpha_{11} - 1)}{\alpha_{11}(\varkappa\, \alpha_{12}^2 - \alpha_{22})} \xi_3^2 + \alpha_{12}^2\, \varkappa\, \xi_4^2 = 0. \end{aligned} \qquad 9.$$

In der ersten Schaar entsprechen sich S und S′ in erster Art wenn $k + k' = \frac{2\, a_{11}}{a_{12}}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\alpha_{11}}{\alpha_{12}}$, dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k\,\overline{k} = \frac{a_{11}}{a_{22}}$, Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa\,\overline{\varkappa} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}$ sich zugeordnet. In der zweiten Schaar entsprechen sich S und S′ in erster Art wenn $k + k' = \frac{2\, a_{22}}{a_{12}^2}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\, \alpha_{22}}{\alpha_{12}^2}$, dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k\,\overline{k} = \frac{a_{22}}{a_{11}\, a_{12}^2}$, Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa\,\varkappa = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\, \alpha_{12}^2}$ sich zugeordnet.

Die Kette von O′ (Ω') löst sich in Ringe von je n Gliedern auf, wenn:

$$(\sqrt{a_{11} a_{22}} + \sqrt{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2})^n = (\sqrt{a_{11} a_{22}} - \sqrt{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2})^n. \qquad 10.$$

§ 14. Der Complex, dessen Grundflächen sich längs eines Kegelschnitts berühren.

Die Grundflächen lassen sich in der Form darstellen:

$$\begin{aligned} S &\equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_2 x_3^2 + a_2 x_4^2 = 0, \quad S' \equiv a_1' x_1^2 + \ldots = 0; \\ \Sigma &\equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_2 \xi_3^2 + \alpha_2 \xi_4^2 = 0, \quad \Sigma' \equiv \alpha_1' \xi_1^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \qquad \text{III.}$$

Die Kurve $x_1 = 0$, $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ ist Berührungskurve und daselbst der Kegel $\xi_1 = 0$, $\xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$ Berührungskegel sowohl zwischen S und S′ als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare III. führen resp. zu den Complexen:

$$\begin{aligned} O &\equiv a_{12} p_{12}^2 + a_{12} p_{13}^2 + a_{12} p_{14}^2 + a_{22} p_{34}^2 + a_{22} p_{42}^2 + a_{22} p_{23}^2 = 0, \\ \Omega &\equiv \alpha_{12} \pi_{12}^2 + \alpha_{12} \pi_{13}^2 + \alpha_{12} \pi_{14}^2 + \alpha_{22} \pi_{34}^2 + \alpha_{22} \pi_{42}^2 + \alpha_{22} \pi_{23}^2 = 0, \end{aligned} \qquad 1.$$

welche identisch werden für

$$\frac{a_{12}}{\alpha_{22}} = \frac{a_{22}}{\alpha_{12}}. \qquad 2.$$

Die Gleichungen der Singularitätenfläche sind:

$$[a_{12} x_1^2 + a_{22}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)]^2 = 0, \quad [\alpha_{12} \xi_1^2 + \alpha_{22}(\xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)]^2 = 0. \qquad 3.$$

Dieselbe besteht aus einer doppelt zu zählenden Fläche U vom 2. Grad. Ein jeder ihrer Punkte ist Doppelpunkt und eine jede ihrer Ebenen ist Doppelebene des Complexes. Alle Complexlinien sind singuläre Linien. Der Complex ist nichts anderes als der Tangentialcomplex von U. Diese U macht doppelt zählend die zwei ausgezeichneten Grundflächen aus, welche sich zugleich in zweifacher Art entsprechen.

Auf analogem Wege wie in früheren Fällen erhalten wir vorerst folgende Gleichungen, welche vier Schaaren von Grundflächen repräsentiren:

$$\begin{aligned} k x_1^2 + a_{22}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) &= 0, \quad \varkappa \xi_1^2 + \alpha_{22}(\xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2) = 0, \\ k x_2^2 + a_{12} x_1^2 + a_{22}(x_3^2 + x_4^2) &= 0, \quad \varkappa \xi_2^2 + \alpha_{12} \xi_1^2 + \alpha_{22}(\xi_3^2 + \xi_4^2) = 0, \\ k x_3^2 + a_{12} x_1^2 + a_{22}(x_2^2 + x_4^2) &= 0, \quad \varkappa \xi_3^2 + \alpha_{12} \xi_1^2 + \alpha_{22}(\xi_2^2 + \xi_4^2) = 0, \\ k x_4^2 + a_{12} x_1^2 + a_{22}(x_2^2 + x_3^2) &= 0, \quad \varkappa \xi_4^2 + \alpha_{12} \xi_1^2 + \alpha_{22}(\xi_2^2 + \xi_3^2) = 0. \end{aligned} \qquad 4.$$

In der ersten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = 2 a_{12}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = 2 \alpha_{12}$ und es sind S und $\bar{S}$ für $k \bar{k} = a_{12}^2$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa \bar{\varkappa} = \alpha_{12}^2$ sich zugeordnet. In jeder der

drei übrigen Schaaren entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = 2\,a_{22}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = 2\,\alpha_{22}$ und es sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k} = a_{22}^2$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa} = \alpha_{22}^2$ sich zugeordnet.

Die Flächen einer solchen Schaar berühren sich und die U längs eines in einer Tetraederseite liegenden Kegelschnitts; dieser und der zugehörige Berührungskegel an U gehören auch zur Schaar, so dass jede der vier Schaaren einen gesonderten Kettentheil repräsentirt. In der That enthält ein jeder Theil ausser dem Kegel und der Kurve, wo er abbricht, noch eine sich selbst zugeordnete Fläche, wo er umkehrt. Die vorhin erhaltenen Gleichungen repräsentiren aber im gegenwärtigen Fall nicht sämmtliche Grundflächen, die dem Complex zukommen. Denn für den betrachteten Tangentialcomplex von U und für dessen Flächenschaaren werden wir immer dieselben Gleichungen erhalten, welches Polartetraeder von U wir auch als Coordinatentetraeder wählen. Mit jedem andern Tetraeder erhalten wir aber wieder (vier) andere Grundflächenschaaren. Es folgt daraus, dass sich längs eines jeden Kegelschnitts auf U unendlich viele Grundflächen berühren, welche einen gesonderten Kettentheil bilden. Ein Tangentialcomplex besitzt also dreifach unendlich viele solcher Kettentheile, somit vierfach unendlich viele Grundflächen.

In Ringe kann sich hier kein Kettentheil auflösen. Ein zweiter Complex mit der gleichen Singularitätenfläche existirt nicht, indem O′ (Ω') mit O (Ω) identisch wird.

§ 15. Der Complex, dessen Grundflächen eine Kurve mit Doppelpunkt gemeinsam haben.

Wir wählen folgende Gleichungen für die erzeugenden Flächen:

$$\text{IV.}\quad \begin{aligned} &S \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2\,a_4 x_3 x_4 = 0,\ S' = a_1' x_1^2 + \ldots = 0;\\ &\Sigma \equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2\,\alpha_3 \xi_4 \xi_3 = 0,\ \Sigma' \equiv \alpha_1' \xi_1^2 + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Für S und S′ sowohl als auch für Σ und Σ' hat das gemeinsame Polartetraeder die Ecken $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ und $\xi_4^2 = 0$ und die Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3^2 = 0$; für die Flächen eines jeden Paares ist also $\xi_4 = 0$ Berührungspunkt und daselbst $x_3 = 0$ Berührungsebene. Jener Punkt ist Doppelpunkt für die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ und diese Ebene ist Doppelebene für die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$. Die zwei Tangenten im Doppelpunkt sind $x_3 = 0$, $a_{14}' x_1^2 + a_{24}' x_2^2 = 0$, die zwei Erzeugenden in der Doppelebene sind $\xi_4 = 0$, $\alpha_{13}' \xi_1^2 + \alpha_{23}' \xi_2^2 = 0$.

Die Flächenpaare IV. führen durch 3. und 4. in § 1 zu den Complexen:

$$\begin{aligned} O &\equiv a_{12}\,p_{12}^2 + a_{13}p_{13}^2 + a_{23}\,p_{23}^2 - a_{44}\,p_{34}^2 + 2\,a_{14}\,p_{13}\,p_{14} + 2\,a_{24}\,p_{23}\,p_{24} = 0, \\ \Omega &\equiv \alpha_{12}\,\pi_{12}^2 + \alpha_{14}\,\pi_{14}^2 + \alpha_{24}\,\pi_{24}^2 - \alpha_{33}\,\pi_{34}^2 + 2\,\alpha_{13}\,\pi_{14}\,\pi_{13} + 2\,\alpha_{23}\,\pi_{24}\,\pi_{23} = 0, \end{aligned} \quad 1.$$

welche identisch werden wenn:

$$\frac{a_{13}}{\alpha_{24}} = \frac{a_{23}}{\alpha_{14}} = -\frac{a_{12}}{\alpha_{33}} = -\frac{a_{44}}{\alpha_{12}} = -\frac{a_{14}}{\alpha_{23}} = -\frac{a_{24}}{\alpha_{13}}. \quad 2.$$

Für die Complexkegel in den Ecken und die Complexkurven in den Seiten des Coordinatentetraeders findet man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} O_1 &\equiv a_{12}\,x_2^2 + a_{13}\,x_3^2 + 2\,a_{14}\,x_3\,x_4 = 0, \quad O_2 \equiv a_{21}\,x_1^2 + a_{23}\,x_3^2 + 2\,a_{24}\,x_3\,x_4 = 0, \\ \Omega_1 &\equiv \alpha_{12}\,\xi_2^2 + \alpha_{14}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{13}\,\xi_4\,\xi_3 = 0, \quad \Omega_2 \equiv \alpha_{21}\,\xi_1^2 + \alpha_{24}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{23}\,\xi_4\,\xi_3 = 0; \end{aligned} \quad 3.$$

dagegen für die Kegel, welche die Ω_1 und Ω_2 von den Tetraederecken aus projiziren und für die Kurven, welche die O_1 und O_2 aus den Tetraederseiten ausschneiden:

$$\begin{aligned} O_1' &\equiv a_{24}^2 x_2^2 + a_{23}a_{44}x_3^2 + 2a_{24}a_{44}x_3x_4 = 0, \quad O_2' \equiv a_{14}^2 x_1^2 + a_{13}a_{44}x_3^2 + 2a_{14}a_{44}x_3x_4 = 0, \\ \Omega_1' &\equiv \alpha_{23}^2 \xi_2^2 + \alpha_{24}\alpha_{33}\xi_4^2 + 2\alpha_{23}\alpha_{33}\xi_4\xi_3 = 0, \quad \Omega_2' \equiv \alpha_{13}^2 \xi_1^2 + \alpha_{14}\alpha_{33}\xi_4^2 + 2\alpha_{13}\alpha_{33}\xi_4\xi_3 = 0. \end{aligned} \quad 4.$$

Schliesslich gebrauchen wir noch die Kürzungen:

$$\begin{aligned} A &= a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} = \alpha_{24}\alpha_{13} - \alpha_{14}\alpha_{23}, \quad A' = a_{23}a_{14} + a_{13}a_{24} = -(\alpha_{24}\alpha_{13} + \alpha_{14}\alpha_{23}), \\ B &= a_{14}a_{24} - a_{12}a_{44} = \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}, \quad B' = a_{14}a_{24} + a_{12}a_{44} = \alpha_{13}\alpha_{23} + \alpha_{12}\alpha_{33}, \\ C_1 &= a_{12}\,a_{13}\,a_{44} - a_{23}\,a_{14}^2 = \alpha_{21}\,\alpha_{24}\,\alpha_{33} - \alpha_{14}\,\alpha_{23}^2, \\ C_1' &= a_{12}\,a_{13}\,a_{44} + a_{23}\,a_{14}^2 = \alpha_{21}\,\alpha_{24}\,\alpha_{33} + \alpha_{14}\,\alpha_{23}^2, \\ C_2 &= a_{21}\,a_{23}\,a_{44} - a_{13}\,a_{24}^2 = \alpha_{12}\,\alpha_{14}\,\alpha_{33} - \alpha_{24}\,\alpha_{13}^2, \\ C_2' &= a_{21}\,a_{23}\,a_{44} + a_{13}\,a_{24}^2 = \alpha_{12}\,\alpha_{14}\,\alpha_{33} + \alpha_{24}\,\alpha_{13}^2. \end{aligned} \quad 5.$$

Als Gleichungen der Singularitätenfläche findet man dann:

$$\begin{aligned} &a_{12}\,a_{14}^2\,x_1^4 + a_{21}\,a_{24}^2\,x_2^4 + a_{31}\,a_{32}\,a_{44}\,x_3^4 + 2\,a_{14}\,a_{24}\,(a_{12}\,x_1^2\,x_2^2 + 2\,a_{44}\,x_3^2\,x_4^2) \\ &+ C_1'\,x_1^2\,x_3^2 + C_2'\,x_2^2\,x_3^2 + 2\,a_{44}\,A'\,x_3^3\,x_4 + 2\,B'(a_{14}\,x_1^2\,x_3\,x_4 + a_{24}\,x_2^2\,x_3\,x_4) = 0, \\ &\alpha_{12}\,\alpha_{13}^2\,\xi_1^4 + \alpha_{21}\,\alpha_{23}^2\,\xi_2^4 + \alpha_{41}\,\alpha_{42}\,\alpha_{33}\,\xi_4^4 + 2\,\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,(\alpha_{12}\,\xi_1^2\,\xi_2^2 + 2\,\alpha_{33}\,\xi_4^2\,\xi_3^2) \\ &+ C_2'\,\xi_1^2\,\xi_4^2 + C_1'\,\xi_2^2\,\xi_4^2 - 2\,\alpha_{33}\,A'\,\xi_4^3\,\xi_3 + 2\,B'(\alpha_{13}\,\xi_1^2\,\xi_4\,\xi_3 + \alpha_{23}\,\xi_2^2\,\xi_4\,\xi_3) = 0. \end{aligned} \quad 6.$$

Dieselben lassen sich in die Formen:

$$O_1O_1' + L_1x_1^2 = 0, \quad O_2O_2' + L_2x_2^2 = 0, \quad \Omega_1\Omega_1' + \Delta_1\xi_1^2 = 0, \quad \Omega_2\Omega_2' + \Delta_2\xi_2^2 = 0 \quad 7.$$

oder in die Formen:

$$
\begin{aligned}
(L_1 + a_{12}a_{14}^2x_1^2)^2 &= 4x_3^2(+a_{12}a_{14}AB x_2^2 + a_{14}^2B^2x_4^2 + C_1^2x_3^2 - a_{14}BC_1x_3x_4),\\
(L_2 + a_{21}a_{24}^2x_2^2)^2 &= 4x_3^2(-a_{21}a_{24}AB x_1^2 + a_{24}^2B^2x_4^2 + C_2^2x_3^2 - a_{24}BC_2x_3x_4),\\
(\mathcal{A}_1 + \alpha_{12}\alpha_{13}^2\xi_1^2)^2 &= 4\,\xi_4^2(+\alpha_{12}\alpha_{13}AB\xi_2^2 + \alpha_{13}^2B^2\xi_3^2 + C_2^2\xi_4^2 - \alpha_{13}BC_2\xi_4\xi_3),\\
(\mathcal{A}_2 + \alpha_{21}\alpha_{23}^2\xi_2^2)^2 &= 4\,\xi_4^2(-\alpha_{21}\alpha_{23}AB\xi_1^2 + \alpha_{23}^2B^2\xi_3^2 + C_1^2\xi_4^2 - \alpha_{23}BC_1\xi_4\xi_3)
\end{aligned}
\qquad 8.
$$

bringen, worin gesetzt wurde:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= a_{12}\,a_{14}^2\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,a_{14}\,a_{24}\,x_2^2 + C_1'\,x_3^2 + 2\,a_{14}\,B'\,x_3\,x_4,\\
L_2 &= a_{21}\,a_{24}^2\,x_2^2 + 2\,a_{21}\,a_{24}\,a_{14}\,x_1^2 + C_2'\,x_3^2 + 2\,a_{24}\,B'\,x_3\,x_4,\\
\mathcal{A}_1 &= \alpha_{12}\,\alpha_{13}^2\,\xi_1^2 + 2\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\xi_2^2 + C_2'\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{13}\,B'\,\xi_4\,\xi_3,\\
\mathcal{A}_2 &= \alpha_{21}\,\alpha_{23}^2\,\xi_2^2 + 2\,\alpha_{21}\,\alpha_{23}\,\alpha_{13}\,\xi_1^2 + C_1'\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{23}\,B'\,\xi_4\,\xi_3.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen 7. und 8. lassen rasch die Gestalt der Singularitätenfläche erkennen. Dieselbe hat zwei Doppellinien D und D′:

$$x_3 = 0,\ a_{14}\,x_1^2 + a_{24}\,x_2^2 = 0 \text{ oder } \xi_4 = 0,\ \alpha_{13}\,\xi_1^2 + \alpha_{23}\,\xi_2^2 = 0. \qquad 9.$$

Der den Doppellinien gemeinsame Punkt p ist ein ausgezeichneter bilinearer Doppelpunkt, dessen Berührungskegel an die Fläche in die Ebenenbüschel D und D′ zerfällt; die den Doppellinien gemeinsame Ebene π ist eine ausgezeichnete bilineare Doppelebene, deren Berührungskurve mit der Fläche in die beiden Punktreihen D und D′ zerfällt.

Die Fläche besitzt ferner vier conische Doppelpunkte und vier conische Doppelebenen. Ihre Schnittkurve mit $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ besteht nämlich aus zwei Kurven 2. Grads Ω_i und Ω_i', zwischen denen p Berührungspunkt ist und deren zwei übrigen gemeinsame Punkte conische Doppelpunkte sind; ebenso besteht der Tangentialkegel von $\xi_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$ aus zwei Kegeln 2. Grads O_i und O_i', zwischen denen π Berührungsebene ist und deren zwei übrigen gemeinsame Ebenen conische Doppelebenen sind.

In $x_1 = 0$ liegen also die conischen Doppelpunkte a_1 und b_1:

$$\pm 2\sqrt{-\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,AB}\,\xi_2 + 2\,\alpha_{13}\,B\,\xi_3 - C_2\,\xi_4 = 0, \qquad 10$$

in $x_2 = 0$ die conischen Doppelpunkte a_2 und b_2:

$$\pm 2\sqrt{+\alpha_{21}\,\alpha_{23}\,AB}\,\xi_1 + 2\,\alpha_{23}\,B\,\xi_3 - C_1\,\xi_4 = 0, \qquad 11$$

durch $\xi_1 = 0$ gehen die conischen Doppelebenen α_1 und β_1:

$$\pm 2\sqrt{-a_{12}\,a_{14}\,AB}\,x_2 + 2\,a_{14}\,B\,x_4 - C_1\,x_3 = 0, \qquad 12$$

durch $\xi_2 = 0$ die conischen Doppelebenen α_2 und β_2:

$$\pm 2\sqrt{+a_{21}\,a_{24}\,AB}\,x_1 + 2\,a_{24}\,B\,x_4 - C_2\,x_3 = 0 \qquad 13.$$

In der That ist das Produkt der beiden linken Seiten in einer der vier letzten Gleichungen gleich dem Klammerausdruck rechterseits in der entsprechenden Gleichung 8.

Die Seite $x_3 = 0$ trifft die Doppelebenen α_1, β_1 und α_2, β_2 in solchen zwei Linienpaaren:

$$x_3 = 0,\ a_{14} B x_4^2 + a_{12} A x_2^2 = 0 \text{ resp. } x_3 = 0,\ a_{24} B x_4^2 - a_{12} A x_1^2 = 0,$$

welche nur vier Punkte a, b und a′, b′ auf D resp. D′ gemeinsam haben, so dass a a′ und b b′ durch $\xi_1 = 0$, a b′ und b a′ durch $\xi_2 = 0$ gehen. Jede der Linien $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\alpha_1\,\beta_2$, $\beta_1\,\alpha_2$, welche resp. durch a, b, a′, b′ gehen, schickt dann offenbar ausser den betreffenden zwei Doppelebenen noch durch D resp. D′ eine Ebene an die Fläche, so dass nothwendig alle Ebenen durch sie die Fläche berühren. Somit schickt jeder der Punkte a, b, a′, b′ ausser durch D resp. D′ noch einen zweiten Ebenenbüschel an die Fläche, d. h. jeder ist ein bilinearer Doppelpunkt derselben. Die Gleichungen dieser vier bilinearen Doppelpunkte sind:

$$\sqrt{\alpha_{13} B}\,\xi_1 \pm \sqrt{-\alpha_{23} B}\,\xi_2 \pm \sqrt{\alpha_{33} A}\,\xi_4 = 0 \qquad 14.$$

Die Ecke $\xi_4 = 0$ schickt an die Doppelpunkte a_1, b_1 und a_2, b_2 solche zwei Linienpaare:

$$\xi_4 = 0,\ \alpha_{13} B \xi_3^2 + \alpha_{12} A \xi_2^2 = 0 \text{ resp. } \xi_4 = 0,\ \alpha_{23} B \xi_3^2 - \alpha_{12} A \xi_1^2 = 0,$$

welche nur vier Ebenen α, β und α', β' durch D resp. D′ gemeinsam haben, so dass $\alpha\,\alpha'$ und $\beta\,\beta'$ in $x_1 = 0$, $\alpha\,\beta'$ und $\beta\,\alpha'$ in $x_2 = 0$ liegen. Jede der Linien $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$, $a_1\,b_2$, $b_1\,a_2$, welche resp. in α, β, α', β liegen, trifft dann offenbar ausser in den betreffenden zwei Doppelpunkten noch in einem Punkte auf D resp. D′ die Fläche, so dass nothwendig alle ihre Punkte auf der Fläche liegen. Somit berührt jede der Ebenen α, β, α', β' ausser längs D resp. D′ noch längs einer zweiten Punktreihe die Fläche, d. h. jede ist eine bilineare Doppelebene derselben. Die Gleichungen dieser vier bilinearen Doppelebenen sind:

$$\sqrt{a_{14} B}\,x_1 \pm \sqrt{-a_{24} B}\,x_2 \pm \sqrt{a_{44} A}\,x_3 = 0. \qquad 15.$$

Die vier Schnittpunkte einer Linie $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\alpha_1\,\beta_2$, $\beta_1\,\alpha_2$ mit der Fläche fallen sämmtlich mit dem betreffenden der Punkte a, b, a′, b′ zusammen, so dass dieser Punkt stationärer Berührungspunkt für alle Ebenen durch jene Linie ist; die vier Tangentialebenen durch eine Linie $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$, $a_1\,b_2$, $b_1\,a_2$ an die Fläche fallen

sämmtlich mit der betreffenden der Ebenen α, β, α', β' zusammen, so dass diese Ebene stationäre Berührungsebene für alle Punkte auf jener Linie ist. Endlich beweist man leicht, dass $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ identisch sind mit $\alpha_2 \beta_2$ resp. $\alpha_1 \beta_1$, indem man berücksichtigt, dass diese Linien in $x_1 = 0$ resp. $x_2 = 0$ liegen und durch $\xi_1 = 0$ resp. $\xi_2 = 0$ gehen. Auf die gegenseitige Lage der Doppelpunkten und Doppelebenen der betrachteten Fläche*) näher einzugehen, haben wir nicht nöthig, denn man wird leicht erkennen, wie folgende Tabelle alle hierhergehörigen Fragen beantwortet:

$$\begin{array}{|llll|}
\hline
a\,b = \alpha\,\beta & a\,a = \alpha_1\alpha_2 & a_1 a_2 = \alpha\,\alpha & a\,a' = \pi\,\alpha_1 & p\,a_1 = \alpha\,\alpha' \\
a'\,b' = \alpha'\,\beta' & b\,b = \beta_1\beta_2 & b_1 b_2 = \beta\,\beta & b\,b' = \pi\,\beta_1 & p\,b_1 = \beta\,\beta' \\
a_1 b_1 = \alpha_2\beta_2 & a'a' = \alpha_1\beta_2 & a_1 b_2 = \alpha'\alpha' & a\,b' = \pi\,\alpha_2 & p\,a_2 = \alpha\,\beta' \\
a_2 b_2 = \alpha_1\beta_1 & b'b' = \beta_1\alpha_2 & b_1 a_2 = \beta'\beta' & b\,a' = \pi\,\beta_2 & p\,b_2 = \beta\,\alpha' \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{|llll|}
\hline
a\,a_1 = \alpha\,\alpha_2 & b\,a_1 = \alpha\,\beta_2 & a'a_1 = \alpha'\beta_2 & b'a_1 = \alpha'\alpha_2 \\
a\,b_1 = \beta\,\alpha_2 & b\,b_1 = \beta\,\beta_2 & a'b_1 = \beta'\beta_2 & b'b_1 = \beta'\alpha_2 \\
a\,a_2 = \alpha\,\alpha_1 & b\,a_2 = \beta\,\beta_1 & a'a_2 = \beta'\alpha_1 & b'a_2 = \beta'\beta_1 \\
a\,b_2 = \beta\,\alpha_1 & b\,b_2 = \alpha\,\beta_1 & a'b_2 = \alpha'\alpha_1 & b'b_2 = \alpha'\beta_1 \\
\hline
\end{array}$$

Untersucht man den Complex $A\,p_{31}\,p_{32} + B\,p_{12}\,p_{34} = 0$, welcher aus dem zuletzt betrachteten dessen singulären Linien ausschneidet, so erkennt man, dass die Erzeugenden der Kegel O_1 und O_2 und die Tangenten der Kurven Ω_1 und Ω_2 singuläre Linien sind. Was die mit diesen Linien zusammenhängenden singulären Punkte und Ebenen betrifft, so gilt das Analoge wie bei dem allgemeineren Baltaglini'schen Complex. Ein Strahlenbüschel von singulären Linien macht den Complexkegel in p und zugleich die Complexkurve in π aus. Zwei Ebenenbüschel durch D und D′ machen die singulären Ebenen für p aus und zwar ist für jede dieser Ebenen stets D resp. D′ die entsprechende singuläre Linie, d. h. für jede zerfällt die Complexkurve in zwei Punkte auf einer Doppellinie. Zwei Punktreihen auf D und D′ machen die singulären Punkte für π aus und zwar ist für jeden dieser Punkte stets D resp. D′ die entsprechende singuläre Linie,

*) Dieselbe ist ein spezieller Fall der Pluecker'schen Complexfläche Pluecker erwähnt sie in seiner „Neuen Geom. d. R." 2. Thl. p. 339. II. Weiler betrachtet die gleiche Fläche in Math. Ann. Bd. 7. p. 183, jedoch weniger ausführlich, besonders was die reciproke Untersuchung betrifft. Der zuletzt erhaltene Complex selbst wird identisch mit dem von Weiler angegebenen Complexe 22. oder [1122]. Siehe auch die Abhandlung von Segre und Loria, Math. Ann. Bd. 23 p. 219.

d. h. für jeden zerfällt der Complexkegel in zwei Ebenen durch eine Doppellinie.

Die Strahlenbüschel von singulären Linien für die conischen Doppelpunkte a_1, b_1, a_2, b_2 liegen in den Ebenen:

$$\begin{aligned} &\pm 2\sqrt{+\alpha_{13}\,A\,B}\,x_2 + \sqrt{\alpha_{12}}\,(C_2 + 2\alpha_{13}\,A)\,x_3 - 2\sqrt{\alpha_{12}\,\alpha_{13}}\,B x_4 = 0, \\ &\pm 2\sqrt{-\alpha_{23}\,A\,B}\,x_1 + \sqrt{\alpha_{21}}\,(C_1 - 2\alpha_{23}\,A)\,x_3 - 2\sqrt{\alpha_{21}\,\alpha_{23}}\,B x_4 = 0. \end{aligned} \qquad 16.$$

Die Strahlenbüschel von singulären Linien für die conischen Doppelebenen α_1, β_1, a_2, β_2 gehen durch die Punkte:

$$\begin{aligned} &\pm 2\sqrt{+a_{14}\,A\,B}\,\xi_2 + \sqrt{a_{12}}\,(C_1 + 2a_{14}\,A)\,\xi_4 - 2\sqrt{a_{12}\,a_{14}}\,B\xi_3 = 0, \\ &\pm 2\sqrt{-a_{24}\,A\,B}\,\xi_1 + \sqrt{a_{21}}\,(C_2 - 2a_{24}\,A)\,\xi_4 - 2\sqrt{a_{21}\,a_{24}}\,B\xi_3 = 0. \end{aligned} \qquad 17.$$

Die Strahlenbüschel von singulären Linien für die bilinearen Doppelpunkte a, b, a′, b′ liegen in den Ebenen:

$$\sqrt{-a_{14}\,a_{24}\,A}\,x_3 \pm \sqrt{a_{12}\,B}\,(\sqrt{-a_{14}}\,x_1 \pm \sqrt{a_{24}}\,x_2) = 0, \qquad 18.$$

welche durch D resp. D′ gehen. Die Strahlenbüschel von singulären Linien für die bilinearen Doppelebenen α, β, a′, β' gehen durch die Punkte

$$\sqrt{-\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,A}\,\xi_4 + \sqrt{\alpha_{12}\,B}\,(\sqrt{-\alpha_{13}}\,\xi_1 \pm \sqrt{\alpha_{23}}\,\xi_2) = 0, \qquad 19.$$

welche auf D resp. D′ liegen. Jedem der bilinearen Doppelpunkte a, b, a′, b′ entsprechen zwei Büschel von singulären Ebenen so, dass D resp. D′ die Axe des einen Büschels und eine der Linien $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\alpha_1\,\beta_2$, $\beta_1\,\alpha_2$ die des andern ist. Für jede Ebene des ersten Büschels ist D resp. D′ die entsprechende singuläre Linie; jede Ebene des zweiten Büschels hat aber ihre eigene singuläre Linie, nämlich jene, in der sie die betreffenden der Ebenen 18. trifft. Jeder der bilinearen Doppelebenen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ entsprechen zwei Reihen von singulären Punkten so, dass D resp. D′ der Träger der einen Reihe und eine der Linien $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$, $a_1\,b_2$, $b_1\,a_2$ der der andern ist. Für jeden Punkt der ersten Reihe ist D resp. D′ die entsprechende singuläre Linie; jeder Punkt der zweiten Reihe hat aber seine eigene singuläre Linie, nämlich jene, welche er an den betreffenden der Punkte 19. schickt.

§ 16. Die Grundflächenkette des vorigen Complexes IV.

Auf die analoge Weise wie in § 3 weist man nach, dass jede Fläche $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 a_4 x_3 x_4 = 0$, oder $\alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2 \alpha_3 \xi_4 \xi_3 = 0$ eine Grundfläche des vorigen Complexes ist, wenn resp.:

$$\begin{aligned} &a_3 (a_1 a_{24} - a_2 a_{14}) = a_4 (a_1 a_{23} - a_2 a_{13}), \\ &a_1 a_2 a_{44} + a_4^2 a_{12} = a_4 (a_1 a_{24} + a_2 a_{14}), \\ &\alpha_4 (\alpha_1 a_{23} - \alpha_2 \alpha_{13}) = \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_{24} - \alpha_2 \alpha_{14}), \\ &\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{33} + \alpha_3^2 \alpha_{12} = \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_{23} + \alpha_2 \alpha_{13}). \end{aligned} \qquad 1.$$

Daraus folgt, dass jede Grundfläche in Punkt resp. Ebenencoordinaten repräsentirt wird durch:

$$S \equiv k x_1^2 + \frac{k a_{24} - a_{21}}{k a_{44} - a_{41}} x_2^2 + \frac{k a_{23}(k a_{44} - a_{41}) - a_{13}(k a_{24} - a_{21})}{k a_{24}(k a_{44} - a_{41}) - a_{14}(k a_{24} - a_{21})} x_3^2 + 2 x_3 x_4 = 0, \qquad 2.$$

$$\Sigma \equiv \varkappa \xi_1^2 + \frac{\varkappa \alpha_{23} - \alpha_{21}}{\varkappa \alpha_{33} - \alpha_{31}} \xi_2^2 + \frac{\varkappa \alpha_{24}(\varkappa \alpha_{33} - \alpha_{31}) - \alpha_{14}(\varkappa \alpha_{23} - \alpha_{21})}{\varkappa \alpha_{23}(\varkappa \alpha_{33} - \alpha_{31}) - \alpha_{13}(\varkappa \alpha_{23} - \alpha_{21})} \xi_4^2 + 2 \xi_4 \xi_3 = 0.$$

S und S′ entsprechen sich dann in erster Art wenn $k + k' = \frac{2 a_{14}}{a_{44}}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2 \alpha_{13}}{\alpha_{33}}$, dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k \overline{k} = \frac{a_{12} a_{14}}{a_{24} a_{44}}$, Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa \overline{\varkappa} = \frac{\alpha_{12} \alpha_{13}}{\alpha_{23} \alpha_{33}}$ sich zugeordnet. *)

Es gibt also eine unendliche Schaar von Grundflächen, zwischen denen stets $\xi_4 = 0$ Berührungspunkt und daselbst $x_3 = 0$ Berührungsebene ist. Die allgemeinen Betrachtungen in § 12 gelten vollständig wieder für diese Flächenschaar. Die degenerirten Flächen $x_3^2 = 0$ und $\xi_4^2 = 0$ bilden hier das isolirte Kettenglied.**) Zwei der vier Kettentheile sind verschwunden, indem deren Flächen sämmtlich mit

---

*) Die Ableitung dieser letzten Werthe ist gerade nicht einfach, vollzieht sich aber auf analoge Weise, wie in § 4. die Gleichung der zugeordneten Fläche gefunden wurde.

**) Die Gleichungen $k^2 - a k + b = 0$, $\varkappa^2 - \alpha \varkappa + \beta = 0$, welche die Wurzeln 1. in § 12 liefern, werden nämlich hier: $k a_{24} (k a_{44} - a_{41}) - a_{14} (k a_{24} - a_{21}) = 0$, $\varkappa \alpha_{23} (\varkappa \alpha_{33} - \alpha_{31}) - \alpha_{13} (\varkappa \alpha_{23} - \alpha_{21}) = 0$ und damit verschwinden die Nenner der Coeffizienten von x_3^2 und ξ_4^2 in der Gleichung 2.

$x_3^2 = 0$ und $\xi_4^2 = 0$ zusammenfielen. Die Gleichungen 2. repräsentiren dann die zwei übrigen Kettentheile. In der That erhalten wir die Complexkegel O_1 und O_2 für $k = 0$ und $k = \frac{a_{21}}{a_{24}}$, die Complexkurven Ω_1 und Ω_2 für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{23}}$ und darum wieder zwei Flächen, von denen jede sich selbst zugeordnet ist, für $k = \pm \sqrt{\frac{a_{12}\, a_{14}}{a_{24}\, a_{44}}}$ oder $\varkappa = \pm \sqrt{\frac{\alpha_{12}\, \alpha_{13}}{\alpha_{23}\, \alpha_{33}}}$.

Die Kette von O (Ω) löst sich, wie aus 4. in § 12 folgt, in Ringe von je n Gliedern auf, wenn:

$$(\sqrt{a_{14}a_{24}} + \sqrt{a_{14}a_{24} - a_{12}a_{44}})^n = (\sqrt{a_{14}a_{24}} - \sqrt{a_{14}a_{24} - a_{12}a_{44}})^n, \quad 5.$$

Durch jeden Punkt gehen vier und jede Ebene berühren vier Grundflächen. Von den vier durch einen singulären Punkt gehenden Flächen entsprechen sich zwei in erster Art und die beiden andern sind sich zugeordnet; von den vier eine singuläre Ebene berührenden Flächen entsprechen sich zwei in zweiter Art und die beiden andern sind sich wieder zugeordnet. Es gibt also zwei Schaaren von Kurven 4. Ordnung, welche sämmtlich in $\xi_4 = 0$ einen Doppelpunkt haben, so auf der Singularitätenfläche, dass jede Kurve der einen Schaar eine jede der andern noch in vier Punkten trifft, während zwei Kurven derselben Schaar sich ausser in $\xi_4 = 0$ nie treffen; ebenso gibt es zwei Schaaren von Enveloppen 4. Klasse, welche sämmtlich in $x_3 = 0$ eine Doppelebene haben, so um die Singularitätenfläche gelegen, dass jede Enveloppe der einen Schaar mit jeder der andern noch vier Ebenen gemein hat, während zwei Enveloppen derselben Schaar ausser $x_3 = 0$ nie eine Ebene gemein haben. Die Tangenten der ersten Kurvenschaar sind identisch mit den Erzeugenden der ersten Enveloppenschaar, es sind die singulären Linien des Complexes O (Ω) in § 15. Die Tangenten der zweiten Kurvenschaar sind identisch mit den Erzeugenden der zweiten Enveloppenschaar, es sind die singulären Linien des Complexes:

$$O' \equiv \frac{p_{12}^2}{a_{44}} + \frac{a_{23}\, p_{13}^2}{a_{24}^2} + \frac{a_{13}\, p_{23}^2}{a_{14}^2} - \frac{p_{34}^2}{a_{12}} + 2\,\frac{p_{13}\, p_{14}}{a_{24}} + 2\,\frac{p_{23}\, p_{24}}{a_{14}} = 0,$$

$$\Omega' \equiv \frac{\pi_{12}^2}{\alpha_{33}} + \frac{\alpha_{24}\, \pi_{14}^2}{\alpha_{23}^2} + \frac{\alpha_{14}\, \pi_{24}^2}{\alpha_{13}^2} - \frac{\pi_{13}^2}{\alpha_{12}} + 2\,\frac{\pi_{14}\, \pi_{13}}{\alpha_{23}} + 2\,\frac{\pi_{24}\, \pi_{23}}{\alpha_{13}} = 0. \quad 3.$$

Dieser Complex besitzt die gleiche Singularitätenfläche wie O (Ω); seine Grundflächenkette wird aber repräsentirt durch:

$$S \equiv k\,x_1^2 + \frac{a_{12}\,a_{42}\,(k\,a_{44} - a_{14})}{a_{14}\,a_{44}\,(k\,a_{42} - a_{12})}\,x_2^2$$
$$+ \frac{a_{13}\,a_{24}\,a_{44}\,k\,(k\,a_{42} - a_{12}) - a_{12}\,a_{14}\,a_{23}\,(k\,a_{44} - a_{14})}{a_{14}\,a_{24}\,(k\,a_{44}\,(k\,a_{42} - a_{12}) - a_{12}\,(k\,a_{44} - a_{14}))}\,x_3^2 + 2\,x_3\,x_4 = 0,$$

5.

$$\Sigma \equiv \varkappa\,\xi_1^2 + \frac{\alpha_{12}\,\alpha_{32}\,(\varkappa\,\alpha_{33} - \alpha_{13})}{\alpha_{13}\,\alpha_{33}\,(\varkappa\,\alpha_{32} - \alpha_{12})}\,\xi_2^2$$
$$+ \frac{\alpha_{14}\,\alpha_{23}\,\alpha_{33}\,\varkappa\,(\varkappa\,\alpha_{32} - \alpha_{12}) - \alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{24}\,(\varkappa\,\alpha_{33} - \alpha_{13})}{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,(\varkappa\,\alpha_{33}\,(\varkappa\,\alpha_{32} - \alpha_{12}) - \alpha_{12}\,(\varkappa\,\alpha_{33} - \alpha_{13}))}\,\xi_4^2 + 2\,\xi_4\,\xi_3 = 0.$$

S und S′ entsprechen sich hier in erster Art wenn $k + k' = 2\,\frac{a_{12}}{a_{24}}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = 2\,\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{23}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k} = \frac{a_{14}\,a_{12}}{a_{44}\,a_{24}}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{13}\,\alpha_{12}}{\alpha_{33}\,\alpha_{23}}$ sich zugeordnet.

Für die Kette des Complexes O′ (Ω') gelten die gleichen Sätze wie für die Kette von O (Ω), nur die Kurven- und Enveloppenschaaren der Singularitätenfläche vertauschen ihre Rollen. Auch die Gleichungen 5. repräsentiren zwei getrennte Kettentheile. In der That erhalten wir die Kegel O_1' und O_2' für $k = 0$ und $k = \frac{a_{14}}{a_{44}}$, die Kurven Ω_1' und Ω_2' für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{33}}$ und wieder zwei Flächen, von denen jede sich selbst zugeordnet ist für $k = \pm\sqrt{\frac{a_{14}a_{12}}{a_{44}a_{24}}}$ oder $\varkappa = \pm\sqrt{\frac{\alpha_{13}\alpha_{12}}{\alpha_{33}\alpha_{23}}}$. Letztere zwei Flächen sind identisch mit jenen, die auch für O (Ω) sich selbst zugeordnet sind; es sind ausser $\xi_4^2 = 0$ und $x_3^2 = 0$ die einzigen Flächen, welche Grundflächen für beide Complexe zugleich sind.

Die Kette von O′ (Ω') löst sich in Ringe von je n Gliedern auf, wenn:

$$(\sqrt{a_{12}a_{44}} + \sqrt{a_{12}a_{44} - a_{14}a_{24}})^n = (\sqrt{a_{12}a_{44}} - \sqrt{a_{12}a_{44} - a_{14}a_{24}})^n. \quad 6.$$

§ 17. Der Complex, dessen Grundflächen einen Kegelschnitt und ein Linienpaar gemeinsam haben.

Flächen in dieser Lage können dargestellt werden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &S \equiv a_1 x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 a_4 x_3 x_4 = 0, \quad S' \equiv a_1' x_1^2 + \ldots = 0; \\ &\Sigma \equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_1 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2 \alpha_3 \xi_4 \xi_3 = 0, \quad \Sigma' \equiv \alpha_1' \xi_1^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \qquad \text{V.}$$

Die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ wird durch die Flächen $a_{13}' x_3^2 + 2 a_{14}' x_3 x_4 = 0$ und $a_{41}' x_1^2 + a_{41}' x_2^2 + a_{43}' x_3^2 = 0$ bestimmt, zerfällt also in das Linienpaar $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und den Kegelschnitt $a_{13}' x_3 + 2 a_{14}' x_4 = 0$, $a_{41}' x_1^2 + a_{41}' x_2^2 + a_{43}' x_3^2 = 0$. Die Spitze $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Linienpaares und die zwei demselben mit dem Kegelschnitt gemeinsamen Punkte $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ sind als Doppelpunkte der Kurve $S = 0$, $S' = 0$ Berührungspunkte zwischen S und S'.

Die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ wird durch die Flächen $\alpha_{14}' \xi_4^2 + 2 \alpha_{13}' \xi_4 \xi_3 = 0$ und $\alpha_{31}' \xi_1^2 + \alpha_{31}' \xi_2^2 + \alpha_{34}' \xi_4^2 = 0$ bestimmt, zerfällt also in das Linienpaar $\xi_4 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ und den Kegel $\alpha_{14}' \xi_4 + 2 \alpha_{13}' \xi_3 = 0$, $\alpha_{31}' \xi_1^2 + \alpha_{31}' \xi_2^2 + \alpha_{34}' \xi_4^2 = 0$. Die Ebene $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_4 = 0$ des Linienpaares und die zwei demselben mit dem Kegel gemeinsamen Ebenen $\xi_4 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ sind als Doppelebenen der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ Berührungsebenen zwischen Σ und Σ'.

$\xi_4 = 0$ und $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ sind die drei Berührungspunkte und daselbst $x_3 = 0$ und $x_1^2 + x_2^2 = 0$ die drei Berührungsebenen sowohl zwischen S und S' als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare V. führen resp. zu den Complexen:

$$\begin{aligned} &O \equiv a_{11} p_{12}^2 + a_{13} p_{13}^2 + a_{13} p_{23}^2 - a_{44} p_{34}^2 + 2 a_{14} p_{13} p_{14} + 2 a_{14} p_{23} p_{24} = 0, \\ &\Omega \equiv \alpha_{11} \pi_{12}^2 + \alpha_{14} \pi_{14}^2 + \alpha_{14} \pi_{24}^2 - \alpha_{33} \pi_{43}^2 + 2 \alpha_{13} \pi_{14} \pi_{13} + 2 \alpha_{13} \pi_{24} \pi_{23} = 0, \end{aligned} \qquad \text{1.}$$

welche identisch werden für:

$$\frac{a_{13}}{\alpha_{14}} = -\frac{a_{11}}{\alpha_{33}} = -\frac{a_{44}}{\alpha_{11}} = -\frac{a_{14}}{\alpha_{13}}. \qquad \text{2.}$$

Bei analoger Bezeichnung wie früher wird:

$$\begin{aligned} &O_1 \equiv a_{11} x_2^2 + a_{13} x_3^2 + 2 a_{14} x_3 x_4 = 0, \quad O_2 \equiv a_{11} x_1^2 + a_{13} x_3^2 + 2 a_{14} x_3 x_4 = 0, \\ &\Omega_1 \equiv \alpha_{11} \xi_2^2 + \alpha_{14} \xi_4^2 + 2 \alpha_{13} \xi_4 \xi_3 = 0, \quad \Omega_2 \equiv \alpha_{11} \xi_1^2 + \alpha_{14} \xi_4^2 + 2 \alpha_{13} \xi_4 \xi_3 = 0, \end{aligned} \qquad \text{3.}$$

$$
\begin{aligned}
O_1' &\equiv a_{14}^2\, x_2^2 + a_{13}\, a_{44}\, x_3^2 + 2\, a_{14}\, a_{44}\, x_3\, x_4 = 0,\\
O_2' &\equiv a_{14}^2\, x_1^2 + a_{13}\, a_{44}\, x_3^2 + 2\, a_{14}\, a_{44}\, x_3\, x_4 = 0,\\
\Omega_1' &\equiv \alpha_{13}^2\, \xi_2^2 + \alpha_{14}\, \alpha_{33}\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_{13}\, \alpha_{33}\, \xi_4\, \xi_3 = 0,\\
\Omega_2' &\equiv \alpha_{13}^2\, \xi_1^2 + \alpha_{14}\, \alpha_{33}\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_{13}\, \alpha_{33}\, \xi_4\, \xi_3 = 0.
\end{aligned}
\qquad 4.
$$

Die Singularitätenfläche hat die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&[a_{14}^2(x_1^2+x_2^2)+a_{44}(a_{13}x_3^2+2a_{14}x_3x_4)]\cdot[a_{11}(x_1^2+x_2^2)+a_{13}x_3^2+2a_{14}x_3x_4]=0,\\
&[\alpha_{13}^2(\xi_1^2+\xi_2^2)+\alpha_{33}(\alpha_{14}\xi_4^2+2\alpha_{13}\xi_4\xi_3)]\cdot[\alpha_{11}(\xi_1^2+\xi_2^2)+\alpha_{14}\xi_4^2+2\alpha_{13}\xi_4\xi_3]=0.
\end{aligned}
\qquad 5.
$$

Dieselbe zerfällt in zwei Flächen U und U′ vom 2. Grad. Letztere treffen sich in zwei Linienpaaren, welche durch die Ebenenpaare $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und $a_{13}\, x_3^2 + 2\, a_{14}\, x_3\, x_4 = 0$ oder durch die Punktpaare $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ und $\alpha_{14}\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_{13}\, \xi_4\, \xi_3 = 0$ bestimmt werden.*) Trotzdem wir hier die gleiche Singularitätenfläche wie in § 10 erhalten, darf letzterer Complex nicht als identisch mit dem des § 10 angesehen werden, denn seine Grundflächen haben eine andere Lage, wie man in § 18 sehen wird.

§ 18. Die Grundflächenkette des vorigen Complexes V.

Soll eine Fläche $a_1\, x_1^2 + a_2\, x_2^2 + a_3\, x_3^2 + 2\, a_4\, x_3\, x_4 = 0$ oder $\alpha_1\, \xi_1^2 + \alpha_2\, \xi_2^2 + \alpha_4\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_3\, \xi_3\, \xi_3 = 0$ Grundfläche für den vorigen Complex sein, so muss sie resp. die Relationen erfüllen:

$$
\begin{aligned}
&(a_1 - a_2)\,(a_3\, a_{14} - a_4\, a_{13}) = 0, \quad a_1\, a_2\, a_{44} + a_4^2\, a_{13} = (a_1 + a_2)\, a_4\, a_{14},\\
&(\alpha_1 - \alpha_2)\,(\alpha_4\, \alpha_{13} - \alpha_3\, \alpha_{14}) = 0, \quad \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_{33} - \alpha_3^2\, \alpha_{13} = (\alpha_1 + \alpha_2)\, \alpha_3\, \alpha_{13}.
\end{aligned}
\qquad 1.
$$

Wir erhalten somit zwei verschiedene Schaaren von Grundflächen. Die erste Schaar wird repräsentirt durch:

$$
\begin{aligned}
S &\equiv k\, x_1^2 + \frac{k\, a_{14} - a_{11}}{k\, a_{44} - a_{14}}\, x_2^2 + \frac{a_{13}}{a_{14}}\, x_3^2 + 2\, x_3\, x_4 = 0,\\
\Sigma &\equiv \varkappa\, \xi_1^2 + \frac{\varkappa\, \alpha_{13} - \alpha_{11}}{\varkappa\, \alpha_{33} - \alpha_{13}}\, \xi_2^2 + \frac{\alpha_{14}}{\alpha_{13}}\, \xi_4^2 + 2\, \xi_4\, \xi_3 = 0,
\end{aligned}
\qquad 2.
$$

*) Beim Uebergange der in § 15 betrachteten Fläche zur gegenwärtigen sind die Punkte a_1, b_1, a_2, b_2 mit dem Punkte $\alpha_{14}\, \zeta_4 + 2\, \alpha_{13}\, \xi_3 = 0$, die Punkte a, b, a′, b′ mit dem Punktpaar $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$, die Ebenen α_1, β_1, α_2, β_2 mit der Ebene $a_{13}\, x_3 + 2\, a_{14}\, x_4 = 0$ und die Ebenen α, β, α', β' mit dem Ebenenpaar $x_1^2 + x_2^2 = 0$ zusammengefallen.

die zweite Schaar durch:

$$S \equiv s(x_1^2 + x_2^2) + k x_3^2 + 2 a_{44} x_3 x_4 = 0,$$
$$\Sigma \equiv \sigma(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \varkappa \xi_4^2 + 2 \alpha_{33} \xi_4 \xi_3 = 0, \qquad 3.$$

worin s und σ, welche wir die Charakteristiken der betreffenden Flächen nennen wollen, resp. Wurzeln der Gleichungen sein müssen:

$$s^2 - 2 s a_{14} + a_{11} a_{44} = 0, \quad \sigma^2 - 2 \sigma \alpha_{13} + \alpha_{11} \alpha_{33} = 0. \qquad 4.$$

In der ersten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = \frac{2 a_{14}}{a_{44}}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2 \alpha_{13}}{\alpha_{33}}$, dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k \overline{k} = \frac{a_{11}}{a_{44}}$, Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa \overline{\varkappa} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}}$ sich zugeordnet.

Für die zweite Schaar gelten wesentlich andere Gesetze. Sind nämlich s_1 und s_2 resp. σ_1 und σ_2 die Wurzeln der Gleichungen 4., so findet man, dass welche der beiden Wurzeln auch eine Fläche als Charakteristik besitzt, der entsprechenden sowohl wie der zugeordneten stets die andere zukommt. Sodann ergibt sich:

S und S′ mit den Parametern k resp. k′ und den Charakteristiken s_1 resp. s_2 entsprechen sich in erster Art wenn $k s_2 + k' s_1 = 2 a_{13} a_{44}$, Σ und Σ' mit den Parametern $\varkappa$ resp. $\varkappa'$ und den Charakteristiken σ_1 resp. σ_2 entsprechen sich in zweiter Art wenn $\varkappa \sigma_2 + \varkappa' \sigma_1 = 2 \alpha_{14} \alpha_{33}$; dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k + \overline{k} = \frac{2 a_{13} a_{44}}{a_{14}}$, Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa + \overline{\varkappa} = \frac{2 \alpha_{14} \alpha_{33}}{\alpha_{13}}$ sich zugeordnet, vorausgesetzt, dass auch diesen Flächen verschiedene Charakteristiken zukommen.

Wie die Grundflächen selbst und wie die zweierlei Kurven- und Enveloppenschaaren hier auf der Singularitätenfläche liegen, geht aus Folgendem hervor:

Zwischen sämmtlichen Flächen der ersten Schaar sind die Doppelpunkte $\alpha_{14} \xi_4^2 + 2 \alpha_{13} \xi_4 \xi_3 = 0$ Berührungspunkte und daselbst die Doppelebenen $a_{13} x_3^2 + 2 a_{14} x_3 x_4 = 0$ Berührungsebenen. Das Ebenenpaar

$$(a_{44} - k a_{14}) x_1^2 + (a_{14}^2 - a_{11} a_{44}) x_2^2 = 0$$

trifft die U in der von singulären Linien umhüllten Kurve $S = 0$, $S' = 0$, das Punktpaar

$$(\alpha_{33} - \varkappa \alpha_{13}) \xi_1^2 + (\alpha_{13}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33}) \xi_2^2 = 0$$

schickt an die U′ die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$. Dagegen kommen weder der Kurve $S = 0$, $\bar{S} = 0$, in der das Ebenenpaar

$$(k\,a_{14} - a_{11})\,(k\,a_{44} - a_{14})\,x_1^2 + k\,(a_{14}^2 - a_{11}\,a_{44})\,x_2^2 = 0$$

die U′ trifft, noch der Envelopppe $\Sigma = 0$, $\bar{\Sigma} = 0$, welche das Punktpaar

$$(\varkappa\,\alpha_{13} - \alpha_{11})\,(\varkappa\,\alpha_{33} - \alpha_{13})\,\xi_1^2 + \varkappa\,(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\,\alpha_{33})\,\xi_2^2 = 0$$

an die U schickt, singuläre Linien zu.

Zwischen den Flächen der zweiten Schaar ist $\xi_4 = 0$ ebenfalls Berührungspunkt und daselbst $x_3 = 0$ Berührungsebene; es sind zwischen denselben aber noch die Doppelpunkte $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ Berührungspunkte und daselbst die Doppelebenen $x_1^2 + x_2^2 = 0$ Berührungsebenen. Die Flächen der zweiten Schaar liegen also wie die Flächenpaare, von denen wir in § 17 ausgingen; sie haben sämmtlich das Linienpaar $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ oder $\xi_4 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ zur gemeinsamen Kurve und Enveloppe. Ausser diesem Linienpaar besteht die von singulären Linien umhüllte Kurve $S = 0$, $S' = 0$ noch aus dem Kegelschnitt, in dem die Ebene

$$(s_2\,k - a_{13}\,a_{44})\,x_3 \mp 2\,a_{44}\sqrt{a_{14}^2 - a_{12}\,a_{44}}\,x_4 = 0$$

die U′ trifft, und die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ noch aus dem Kegel, die der Punkt

$$(\sigma_2\,\varkappa - \alpha_{14}\,\alpha_{33})\,\xi_4 \mp 2\,\alpha_{33}\sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\,\alpha_{33}}\,\xi_3 = 0$$

an die U schickt. Ausser demselben Linienpaar besteht aber die nicht von singulären Linien umhüllte Kurve $S = 0$, $\bar{S} = 0$ noch aus dem Kegelschnitt, in dem die Ebene

$$(s_1\,a_{13}\,a_{44} - a_{14}^2\,k)\,x_3 \pm 2\,a_{14}\,a_{44}\sqrt{a_{14}^2 - a_{11}\,a_{44}}\,x_4 = 0$$

die U trifft, und die nicht von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\bar{\Sigma} = 0$ noch aus dem Kegel, den der Punkt

$$(\sigma_1\,\alpha_{14}\,\alpha_{33} - \alpha_{13}^2\,\varkappa)\,\xi_4 \pm 2\,\alpha_{13}\,\alpha_{33}\sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\,\alpha_{33}}\,\xi_3 = 0$$

an die U′ schickt.

Die erste Flächenschaar umfasst zwei gesonderte Kettentheile, denn sie enthält die Kegel O_1 und O_2 für $k = 0$ und $k = \frac{a_{11}}{a_{14}}$, die

Kurven Ω_1 und Ω_2 für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}}$ und somit auch zwei Flächen, von denen jede sich selbst zugeordnet ist, für $k = \pm \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{44}}}$ oder $\varkappa = \pm \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}}}$.

Während also diese erste Schaar in jeder Hinsicht mit der in § 11 betrachteten ersten Schaar übereinstimmt, ist dies bei der zweiten nicht mehr der Fall. Denn nicht nur die Lage der letztern zur Singularitätenfläche ist eine andere, sondern sie wird sich auch nicht mehr in der bisherigen Weise in Kettentheile auflösen. Hierin beruht eben die oben erwähnte Abwägung des vorigen Complexes von dem des § 10. Jedoch besitzt auch dieser Complex wie jener, zwei Flächen, die ihn in zweifacher Weise erzeugen, also ein isolirtes Kettenglied bilden, nämlich die Flächen:

$$\begin{aligned} s_1 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{a_{13}\, a_{44}}{a_{14}} x_3^2 + 2\, a_{44}\, x_3\, x_4 &= 0, \\ \sigma_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{\alpha_{14}\, \alpha_{33}}{\alpha_{13}} \xi_4^2 + 2\, \alpha_{33}\, \xi_4\, \xi_3 &= 0 \end{aligned} \qquad 5.$$

und

$$\begin{aligned} s_2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{a_{13}\, a_{44}}{a_{14}} x_3^2 + 2\, a_{44}\, x_3\, x_4 &= 0, \\ \sigma_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{\alpha_{14}\, \alpha_{33}}{\alpha_{13}} \xi_4^2 + 2\, \alpha_{33}\, \xi_4\, \xi_3 &= 0. \end{aligned} \qquad 6.$$

Die zweite Flächenschaar lässt nicht mehr die Betrachtungen des § 12 auf sich anwenden, wesshalb sie einer eigenen Untersuchung bedarf. Gehen wir von irgend einer Fläche S oder Σ aus und suchen die Parameter für die in der graphischen Darstellung auf sie successive (so wie in § 12) folgenden Flächen S_1, S_2, . . . resp. Σ_1, Σ_2, . . ., so finden wir bald unter Berücksichtigung, dass $s_1 + s_2 = 2\, a_{14}$, $s_1\, s_2 = a_{11}\, a_{44}$, $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\, \alpha_{13}$, $\sigma_1\, \sigma_2 = \alpha_{11}\, \alpha_{33}$ ist, das Gesetz:

Hat die S die Charakteristik s_1 und den Parameter k, so hat die S_{2n-1} die Charakteristik s_2 und den Parameter

$$k_{2n-1} = \frac{a_{13}\, a_{44}}{a_{14}} - \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^n \left(k - \frac{a_{13}\, a_{44}}{a_{14}}\right), \qquad 7.$$

dagegen die S_{2n} die Charakteristik s_1 und den Parameter

$$k_{2n} = \frac{a_{13}\, a_{44}}{a_{14}} + \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^n \left(k - \frac{a_{13}\, a_{44}}{a_{14}}\right); \qquad 8.$$

hat die Σ die Charakteristik σ_1 und den Parameter $\varkappa$, so hat die Σ_{2n-1} die Charakteristik σ_2 und den Parameter

$$\varkappa_{2n-1} = \frac{\alpha_{14}\, \alpha_{33}}{\alpha_{13}} - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^n \left(\varkappa - \frac{\alpha_{14}\, \alpha_{33}}{\alpha_{13}}\right), \qquad 9.$$

dagegen die Σ_{2n} die Charakteristik σ_1 und den Parameter

$$\varkappa_{2n} = \frac{\alpha_{14}\, \alpha_{33}}{\alpha_{13}} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^n \left(\varkappa - \frac{\alpha_{14}\, \alpha_{33}}{\alpha_{13}}\right). \qquad 10.$$

Legen wir nun in 7. und 8. oder in 9. und 10. dem n alle ganzzahligen Werthe bei, so erhalten wir die Parameter für die Flächen eines fortlaufenden, unendlichen Kettentheils. Verfolgen wir die Flächen eines solchen Theils, so nähern wir uns (wenn $s_1 > s_2$ und $\sigma_1 > \sigma_2$ ist) auf der einen Seite dem Paare 5. und 6., um es erst für $n = +\infty$ zu erreichen, und auf der andern Seite dem Paare $x_3^2 = 0$ und $\xi_4^2 = 0$, um es erst für $n = -\infty$ zu erreichen. Ein solcher Kettentheil verläuft aber wesentlich anders als die bisher vorgekommenen. Denn die Flächen 5. und 6. und ebenso $x_3^2 = 0$ und $\xi_4^2 = 0$ bilden isolirte Kettenglieder, so dass die fortlaufende Kette sich denselben nur asymptotisch nähern aber sie nie erreichen kann, während bei den bisher vorgekommenen Kettentheilen stets der Kegel und die Kurve einerseits und die sich selbst zugeordnete Fläche andererseits mit dem fortlaufenden Theile thatsächlich zusammenhingen. Die Ausdrücke 7. und 8. oder 9. und 10. zeigen ferner, dass zwei Flächen, die den gleichen Parameter aber verschiedene Charakteristik haben, nicht dem gleichen Kettentheil angehören können, denn sonst müsste $k_{2n-1} = k$ oder $\varkappa_{2n-1} = \varkappa$, d. h. $s_1^n + s_2^n = 0$ oder $\sigma_1^n + \sigma_2^n = 0$ werden. Wir erhalten daher nothwendig aus einem Kettentheil noch einen zweiten, wenn wir in ersterem jeder Fläche die andere Charakteristik beilegen. Somit:

Die zweite Flächenschaar umfasst ebenfalls zwei getrennte Kettentheile, aber so, dass ein jeder sich auf der einen Seite dem Flächenpaar 5. und 6., auf der andern dem Flächenpaar $x_3^2 = 0$ und $\xi_4^2 = 0$ asymptotisch nähert, ohne dieselben zu erreichen. Der eine Kettentheil geht aus dem andern dadurch hervor, dass man,

während alle Parameter ungeändert bleiben, alle Charakteristiken vertauscht.

Der zweite Complex, welcher die gleiche Singularitätenfläche, aber eine andere Kette besitzt, wird hier:

$$O' \equiv \frac{p_{12}^2}{a_{44}} + \frac{a_{13}\,p_{13}^2}{a_{14}^2} + \frac{a_{13}\,p_{23}^2}{a_{14}^2} - \frac{p_{34}^2}{a_{11}} + 2\,\frac{p_{13}\,p_{14}}{a_{14}} + 2\,\frac{p_{23}\,p_{24}}{a_{14}} = 0,$$

$$\Omega' \equiv \frac{\pi_{12}^2}{\alpha_{33}} + \frac{\alpha_{14}\,\pi_{14}^2}{\alpha_{13}^2} + \frac{\alpha_{14}\,\pi_{24}^2}{\alpha_{13}^2} - \frac{\pi_{43}^2}{\alpha_{11}} + 2\,\frac{\pi_{14}\,\pi_{13}}{\alpha_{13}} + 2\,\frac{\pi_{24}\,\pi_{23}}{\alpha_{13}} = 0. \qquad 11.$$

Für die Kette von O′ (Ω') gelten die gleichen Sätze wie für die von O (Ω), nur die Theile U und U′ der Singularitätenfläche vertauschen ihre Rollen.

Um schliesslich die Bedingungen aufzustellen, unter denen die Ketten von O (Ω) und O′ (Ω') in Ringe zerfallen, haben wir, was die erste Schaar betrifft, die Formeln 4. in § 12 anzuwenden; für die zweite Schaar erhalten wir aber diese Bedingungen, indem wir mittelst der Formeln 8. oder 10. ausdrücken, dass S_{2n} mit S oder Σ_{2n} mit Σ identisch werden. Dieser zweite Weg führt merkwürdiger Weise zu dem gleichen Resultat wie bei der ersten Schaar, nämlich:

Die Kette von O (Ω) löst sich in Ringe von je n Gliedern auf, wenn:

$$(a_{14} + \sqrt{a_{14}^2 - a_{11}a_{44}})^n = (a_{14} - \sqrt{a_{14}^2 - a_{11}a_{44}})^n; \qquad 12.$$

die Kette von O′ (Ω') löst sich in Ringe von je n Gliedern auf, wenn:

$$(\sqrt{a_{11}a_{44}} + \sqrt{a_{11}a_{44} - a_{14}^2})^n = (\sqrt{a_{11}a_{44}} - \sqrt{a_{11}a_{44} - a_{14}^2})^n. \qquad 13.$$

§ 19. Der Complex, dessen Grundflächen als gemeinsame Kurve zwei sich berührende Kegelschnitte haben.

Wir stellen die Gleichungen der erzeugenden Flächen in den Formen auf:

$$S \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2\,a_1 x_3 x_4 = 0,\ S' \equiv a_1' x_1^2 + \ldots = 0;$$
$$\Sigma \equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2\,\alpha_1 \xi_4 \xi_3 = 0,\ \Sigma' \equiv \alpha_1' \xi_1^2 + \ldots = 0. \qquad \text{VI.}$$

Die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ wird durch das Ebenenpaar $a_{12}' x_2^2 + a_{13}' x_3^2 = 0$ und den Kegel $a_{21}' x_1^2 + a_{23}' x_3^2 + 2\,a_{21}' x_3 x_4 = 0$ bestimmt; sie besteht also aus zwei Kurven 2. Grads, zwischen denen $x_1 = 0$,

$x_2 = 0$, $x_3 = 0$ Berührungspunkt ist. In diesem Punkt, in welchem zwei Doppelpunkte der Kurve $S = 0$, $S' = 0$ zusammenfallen, haben S und S′ eine doppelte Berührung.

Die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ wird durch das Punktpaar $\alpha'_{12}\,\xi_2^2 + \alpha'_{14}\,\xi_4^2 = 0$ und den Kegelschnitt $\alpha'_{21}\,\xi_1^2 + \alpha'_{24}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha'_{21}\,\xi_4\,\xi_3 = 0$ bestimmt; sie besteht also aus zwei Kegeln 2. Grads, zwischen denen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_4 = 0$ Berührungsebene ist. In dieser Ebene, mit der zwei Doppelebenen der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ zusammenfallen, haben Σ und Σ' eine doppelte Berührung.

$\xi_4 = 0$ ist der doppelte Berührungspunkt und daselbst $x_3 = 0$ die doppelte Berührungsebene sowohl zwischen S und S′ als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare VI. führen resp. zu den Complexen:

$$\begin{aligned} O &\equiv a_{12}\,p_{12}^2 + a_{13}\,p_{13}^2 + a_{23}\,p_{23}^2 - a_{11}\,p_{34}^2 + 2\,a_{11}\,p_{13}\,p_{14} + 2\,a_{21}\,p_{23}\,p_{24} = 0, \\ \Omega &\equiv \alpha_{12}\,\pi_{12}^2 + \alpha_{14}\,\pi_{14}^2 + \alpha_{24}\,\pi_{24}^2 - \alpha_{11}\,\pi_{43}^2 + 2\alpha_{11}\,\pi_{14}\,\pi_{13} + 2\alpha_{21}\,\pi_{24}\,\pi_{23} = 0, \end{aligned} \quad 1.$$

welche identisch werden für

$$\frac{a_{13}}{\alpha_{24}} = \frac{a_{23}}{\alpha_{14}} = -\frac{a_{12}}{\alpha_{11}} = -\frac{a_{11}}{\alpha_{12}}. \quad 2.$$

Bei analoger Bezeichnung wie früher wird:

$$O_1 \equiv a_{12}\,x_2^2 + a_{13}\,x_3^2 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0, \quad O_2 \equiv a_{21}\,x_1^2 + a_{23}\,x_3^2 + 2\,a_{21}\,x_3\,x_4 = 0,$$
$$\Omega_1 \equiv \alpha_{12}\,\xi_2^2 + \alpha_{14}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0, \quad \Omega_2 \equiv \alpha_{21}\,\xi_1^2 + \alpha_{24}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{21}\,\xi_4\,\xi_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} O'_1 &\equiv a_{21}^2\,x_2^2 + a_{23}\,a_{11}\,x_3^2 + 2\,a_{21}\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0, \\ O'_2 &\equiv a_{11}\,x_1^2 + a_{13}\,x_3^2 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0, \\ \Omega'_1 &\equiv a_{21}^2\,\xi_2^2 + \alpha_{24}\,\alpha_{11}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{21}\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0, \\ \Omega'_2 &\equiv \alpha_{11}\,\xi_1^2 + \alpha_{14}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0. \end{aligned} \quad 3.$$

Als Gleichungen der Singularitätenfläche findet man:

$$\begin{aligned} &[a_{12}\,(a_{11}\,x_1^2 + a_{12}\,x_2^2) + a_{11}\,(a_{32}\,x_3^2 + 2\,a_{12}\,x_3\,x_4)] \\ &\cdot [a_{11}\,x_1^2 + a_{12}\,x_2^2 + a_{13}\,x_3^2 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4] = 0, \\ &[\alpha_{12}\,(\alpha_{11}\,\xi_1^2 + \alpha_{12}\,\xi_2^2) + \alpha_{11}\,(\alpha_{24}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{12}\,\xi_4\,\xi_3)] \\ &\cdot [\alpha_{11}\,\xi_1^2 + \alpha_{12}\,\xi_2^2 + \alpha_{14}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3] = 0. \end{aligned} \quad 4.$$

Dieselbe zerfällt in zwei Flächen U und U′ vom 2. Grad, welche sich längs den zwei Erzeugenden $x_3 = 0$, $a_{11}\,x_1^2 + a_{12}\,x_2^2 = 0$ oder $\xi_4 = 0$, $\alpha_{11}\,\xi_1^2 + \alpha_{12}\,\xi_2^2 = 0$ berühren. Die Singularitätenfläche des § 10 geht in die gegenwärtige über, wenn die vier den Flächen U und U′ gemeinsame Erzeugenden paarweise zusammenfallen; die

beiden Geraden, längs denen sich hier U und U′ berühren, sind desshalb als zweifache Doppellinien anzusehen. Nur der gemeinsame Punkt dieser Doppellinien ist Doppelpunkt und nur die gemeinsame Ebene derselben ist Doppelebene des Complexes. Ein Strahlenbüschel von singulären Linien macht den Complexkegel im Doppelpunkt und zugleich die Complexkurve in der Doppelebene aus. Der Complex $p_{13}\ p_{23} = 0$, welcher aus dem betrachteten dessen singulären Linien ausschneidet, zerfällt in zwei spezielle Complexe mit den Direktricen p_{13} und p_{23}. Die Congruenz der singulären Linien zerfällt also in zwei Congruenzen 2. Grads mit den gleichen Direktricen und zwar so, dass die eine die Fläche U, die andere die Fläche U′ umhüllt. Alles Uebrige ist den Betrachtungen des § 10 analog.*)

§ 20. Die Grundflächenkette des letzten Complexes VI.

Soll eine Fläche $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 a_4 x_3 x_4 = 0$ oder $\alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2 \alpha_3 \xi_4 \xi_3 = 0$ Grundfläche für den vorigen Complex sein, so muss sie resp. die Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned} &(a_1 - a_4)(a_2 a_{11} - a_4 a_{12}) = 0,\quad a_3(a_1 a_{12} - a_2 a_{11}) = a_4(a_1 a_{23} - a_2 a_{13}),\\ &(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 \alpha_{11} - \alpha_3 \alpha_{12}) = 0,\quad \alpha_4(\alpha_1 \alpha_{12} - \alpha_2 \alpha_{11}) = \alpha_3(\alpha_1 \alpha_{24} - \alpha_2 \alpha_{14}). \end{aligned} \quad 1.$$

Wir erhalten somit wieder zwei verschiedene Schaaren von Grundflächen. Die erste Schaar wird repräsentirt durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv x_1^2 + k\, x_2^2 + \frac{a_{23} - k\, a_{13}}{a_{12} - k\, a_{11}} x_3^2 + 2\, x_3\, x_4 = 0,\\ \Sigma &\equiv \xi_1^2 + \varkappa\, \xi_2^2 + \frac{\alpha_{24} - \varkappa\, \alpha_{14}}{\alpha_{12} - \varkappa\, \alpha_{11}} \xi_4^2 + 2\, \xi_4\, \xi_3 = 0, \end{aligned} \quad 2.$$

die zweite Schaar durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv k\, x_1^2 + a_{12} x_2^2 + \frac{a_{11}(a_{23} k - a_{12} a_{13})}{a_{12}(k - a_{11})} x_3^2 + 2\, a_{11} x_3 x_4 = 0,\\ \Sigma &\equiv \varkappa\, \xi_1^2 + \alpha_{12} \xi_2^2 + \frac{\alpha_{11}(\alpha_{24} \varkappa - \alpha_{12} \alpha_{14})}{\alpha_{12}(\varkappa - \alpha_{11})} \xi_4^2 + 2\, \alpha_{11} \xi_4 \xi_3 = 0. \end{aligned} \quad 3.$$

---

*) Man erkennt nun, dass der erhaltene Complex identisch ist mit dem Complexe 28. oder [(12) (12)] bei Weiler. Segre und Loria erwähnen denselben in Math. Ann. Bd. 23. p. 229. a. a. O.

In der ersten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = \frac{2\,a_{12}}{a_{11}}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\,\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$, dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k\,\overline{k} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}$, Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa\,\overline{\varkappa} = \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}^2}$ sich zugeordnet.

In der zweiten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = 2\,a_{11}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = 2\,\alpha_{11}$, dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k\,\overline{k} = a_{11}^2$, Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa\,\overline{\varkappa} = \alpha_{11}^2$ sich zugeordnet.

Sämmtliche Flächen der ersten Schaar haben in $\xi_4 = 0$ eine doppelte Berührung und daselbst $x_3 = 0$ zur gemeinsamen Berührungsebene; sie liegen also wie die Flächenpaare, von denen wir in § 19 ausgingen. Das Ebenenpaar

$$(a_{12} - k\,a_{11})^2\,x_2^2 - (a_{23}\,a_{11} - a_{13}\,a_{21})\,x_3^2 = 0$$

trifft die U′ in der von singulären Linien umhüllten Kurve $S = 0$, $S' = 0$, das Punktpaar

$$(\alpha_{12} - \varkappa\,\alpha_{11})^2\,\xi_2^2 - (\alpha_{24}\,\alpha_{11} - \alpha_{14}\,\alpha_{21})\,\xi_4^2 = 0$$

schickt an die U die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$; dagegen kommen weder der Kurve $S = 0$, $\overline{S} = 0$, in der das Ebenenpaar

$$a_{12}\,(a_{11}\,k - a_{12})^2\,x_2^2 + k\,a_{11}\,(a_{23}\,a_{11} - a_{13}\,a_{21})\,x_3^2 = 0$$

die U trifft, noch der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\overline{\Sigma} = 0$, welche das Punktpaar

$$\alpha_{12}\,(\alpha_{11}\,\varkappa - \alpha_{12})^2\,\xi_2^2 + \varkappa\,\alpha_{11}\,(\alpha_{24}\,\alpha_{11} - \alpha_{14}\,\alpha_{21})\,\xi_4^2 = 0$$

an die U′ schickt, singuläre Linien zu.

Auch die Flächen der zweiten Schaar haben sämmtlich in $\xi_4 = 0$ eine doppelte Berührung und daselbst $x_3 = 0$ zur gemeinsamen Berührungsebene. Das Ebenenpaar

$$a_{11}\,a_{12}\,(k - 1)^2\,x_1^2 + (a_{23}\,a_{11} - a_{13}\,a_{21})\,x_3^2 = 0$$

trifft die U in der von singulären Linien umhüllten Kurve $S = 0$, $S' = 0$, das Punktpaar

$$\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,(\varkappa - 1)^2\,\xi_1^2 + (\alpha_{24}\,\alpha_{11} - \alpha_{14}\,\alpha_{21})\,\xi_4^2 = 0$$

schickt an die U′ die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$; dagegen kommen weder der Kurve $S = 0$, $\overline{S} = 0$, in der das Ebenenpaar

$$a_{11}\,a_{12}\,(k-1)^2\,x_1^2 + k\,(a_{23}\,a_{11} - a_{13}\,a_{21})\,x_3^2 = 0$$

die U′ trifft, noch der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\bar{\Sigma} = 0$, welche das Punktpaar

$$\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,(\varkappa-1)^2\,\xi_1^2 + \varkappa\,(\alpha_{24}\,\alpha_{11} - \alpha_{14}\,\alpha_{21})\,\xi_4^2 = 0$$

an die U schickt, singuläre Linien zu.

Jede der beiden Flächenschaaren umfasst in diesem Falle nur einen in sich abgeschlossenen Kettentheil. Denn die erste Schaar enthält nur den Kegel O_2 und die Kurve Ω_2 und somit nur die eine sich selbst zugeordnete Fläche für $k = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$ oder $\varkappa = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$; die zweite Schaar enthält nur den Kegel O_1 und die Kurve Ω_1 und somit nur die eine sich selbst zugeordnete Fläche für $k = -a_{11}$ oder $\varkappa = -\alpha_{11}$. Die drei übrigen Theile der Kette kann man sich zusammengefallen denken mit $x_3^2 = 0$ und $\xi_4^2 = 0$, welche hier zugleich auch das isolirte Kettenglied bilden.

Der zweite Complex, welcher die gleiche Singularitätenfläche besitzt, wird:

$$\begin{aligned} O' &\equiv \frac{p_{12}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}\,p_{13}^2}{a_{12}^2} + \frac{a_{13}\,p_{23}^2}{a_{11}^2} - \frac{p_{34}^2}{a_{12}} + \frac{2\,p_{13}\,p_{14}}{a_{12}} + \frac{2\,p_{23}\,p_{24}}{a_{11}} = 0, \\ \Omega' &\equiv \frac{\pi_{12}^2}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{24}\,\pi_{14}^2}{\alpha_{12}^2} + \frac{\alpha_{14}\,\pi_{24}^2}{\alpha_{11}^2} - \frac{\pi_{43}^2}{\alpha_{12}} + \frac{2\,\pi_{14}\,\pi_{13}}{\alpha_{12}} + \frac{2\,\pi_{24}\,\pi_{23}}{\alpha_{11}} = 0. \end{aligned} \qquad 4.$$

Von den beiden Schaaren seiner Grundflächenkette wird die erste repräsentirt durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv x_1^2 + k\,x_2^2 + \frac{a_{12}^2\,a_{13} - k\,a_{11}^2\,a_{23}}{a_{11}\,a_{12}\,(a_{12} - k\,a_{11})}\,x_3^2 + 2\,x_3\,x_4 = 0, \\ \Sigma &\equiv \xi_1^2 + \varkappa\,\xi_2^2 + \frac{\alpha_{12}^2\,\alpha_{14} - \varkappa\,\alpha_{11}^2\,\alpha_{24}}{\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,(\alpha_{12} - \varkappa\,\alpha_{11})}\,\xi_4^2 + 2\,\xi_4\,\xi_3 = 0, \end{aligned} \qquad 5.$$

die zweite durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv a_{11}\,a_{12}\,k\,x_1^2 + a_{12}\,x_2^2 + \frac{k\,a_{12}^2\,a_{13} - a_{11}\,a_{23}}{a_{12}\,(k\,a_{12} - 1)}\,x_3^2 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0, \\ \Sigma &\equiv \alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\varkappa\,\xi_1^2 + \alpha_{12}\,\xi_2^2 + \frac{\varkappa\,\alpha_{12}^2\,\alpha_{14} - \alpha_{11}\,\alpha_{24}}{\alpha_{12}\,(\varkappa\,\alpha_{12} - 1)}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0. \end{aligned} \qquad 6.$$

In der ersten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = \frac{2\,a_{12}}{a_{11}}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\,\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}^2}$ sich zugeordnet.

In der zweiten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = \frac{2}{\alpha_{12}}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2}{\alpha_{12}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\bar{k} = \frac{1}{a_{12}^2}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\bar{\varkappa} = \frac{1}{\alpha_{12}^2}$ sich zugeordnet.

Für die Kette von O′ (Ω') gelten die gleichen Sätze wie für die von O (Ω), nur die Theile U und U′ der Singularitätenfläche vertauschen ihre Rollen. Keine der beiden Ketten kann sich hier in Ringe auflösen.

§ 21. Der Complex, dessen Grundflächen sich längs eines Linienpaares berühren.

Die Gleichungen der Grundflächen setzen wir in den Formen voraus:

$$\begin{aligned} S &\equiv a_1 x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 a_1 x_3 x_4 = 0, \quad S' \equiv a_1' x_1^2 + \ldots = 0; \\ \Sigma &\equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_1 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2 \alpha_1 \xi_4 \xi_3 = 0, \quad \Sigma' \equiv \alpha_1' \xi_1^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \qquad \text{VII.}$$

Die durch das Linienpaar $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ oder $\xi_4 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ bestimmten Punktreihen bilden die Berührungskurve und die durch dasselbe bestimmten Ebenenbüschel bilden den Berührungskegel sowohl zwischen S und S′ als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare VII. führen resp. zu den Complexen:

$$\begin{aligned} O &\equiv a_{11} p_{12}^2 + a_{13} p_{13}^2 + a_{13} p_{23}^2 - a_{11} p_{34}^2 + 2 a_{11} p_{13} p_{14} + 2 a_{11} p_{23} p_{24} = 0, \\ \Omega &\equiv \alpha_{11} \pi_{12}^2 + \alpha_{14} \pi_{14}^2 + \alpha_{14} \pi_{24}^2 - \alpha_{11} \pi_{43}^2 + 2\alpha_{11} \pi_{14} \pi_{13} + 2\alpha_{11} \pi_{24} \pi_{23} = 0, \end{aligned} \qquad 1.$$

welche identisch werden, wenn:

$$\frac{a_{11}}{\alpha_{11}} = -\frac{a_{13}}{\alpha_{14}}. \qquad 2.$$

Die Gleichungen der Singularitätenfläche sind:

$$[a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{13} x_3^2 + 2 a_{11} x_3 x_4]^2 = 0, \quad [\alpha_{11}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \alpha_{14} \xi_4^2 + 2\alpha_{11} \xi_4 \xi_3]^2 = 0. \qquad 3.$$

Der erhaltene Complex ist somit kein anderer als der in § 14 betrachtete Tangentialcomplex. Es giebt daher hier wieder vierfach unendlich viele Grundflächen oder dreifach unendlich viele Kettentheile, wenn uns auch der bekannte Weg nur zu folgenden Gleichungen führt:

$$\begin{array}{l} kx_1^2+a_{11}x_2^2+a_{13}x_3^2+2a_{11}x_3x_4=0,\ \varkappa\xi_1^2+\alpha_{11}\xi_2^2+\alpha_{14}\xi_4^2+2\alpha_{11}\xi_4\xi_3=0,\\ a_{11}x_1^2+kx_2^2+a_{13}x_3^2+2a_{11}x_3x_4=0,\ \alpha_{11}\xi_1^2+\varkappa\xi_2^2+\alpha_{14}\xi_4^2+2\alpha_{11}\xi_4\xi_3=0,\\ a_{11}x_1^2+a_{11}x_2^2+kx_3^2+2a_{11}x_3x_4=0,\ \alpha_{11}\xi_1^2+\alpha_{11}\xi_2^2+\varkappa\xi_4^2+2\alpha_{11}\xi_4\xi_3=0. \end{array} \quad 4.$$

Dieselben repräsentiren nur jene drei unter den dreifach unendlich vielen Kettentheilen, welche mit dem gemeinsamen Polartetraeder der Flächenpaare, von denen wir ausgingen, näher zusammenhängen. Denn die Flächen eines jeden dieser Kettentheile berühren sich und die Singularitätenfläche längs desjenigen Kegelschnitts, in welchem letztere resp. von der Seite $x_1=0$, $x_2=0$ oder $x_3=0$ getroffen wird. In den ersten zwei Theilen entsprechen sich S und S′ wenn $k+k'=2a_{11}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa$ und $\varkappa'=2\alpha_{11}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k}=a_{11}^2$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa}=\alpha_{11}^2$ sich zugeordnet. Im letzten Theil entsprechen sich S und S′ wenn $k+k'=2a_{13}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa+\varkappa'=2\alpha_{14}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k}=a_{13}^2$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa}=\alpha_{14}^2$ sich zugeordnet.

§ 22. Der Complex, dessen Grundflächen eine Kurve mit Spitze gemeinsam haben.

Für die erzeugenden Flächen nehmen wir die Gleichungsformen:

$$\begin{array}{l} S\equiv a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+2a_4x_2x_3+2a_2x_3x_4=0,\ S'\equiv a_1'x_1^2+\ldots=0;\\ \Sigma\equiv\alpha_1\xi_1^2+\alpha_2\xi_2^2+\alpha_4\xi_4^2+2\alpha_3\xi_2\xi_4+2\alpha_2\xi_4\xi_3=0,\ \Sigma'\equiv a_1'\xi_1^2+\ldots=0. \end{array} \quad \text{VIII.}$$

S und S′ sowohl als auch Σ und Σ' haben als gemeinsames Polartetraeder das mit den Ecken $\xi_1=0$ und $\xi_4^3=0$ und den Seiten $x_1=0$ und $x_3^3=0$; zwischen den Flächen eines jeden Paares ist also $\xi_4=0$ ein ausgezeichneter Berührungspunkt und daselbst $x_3=0$ eine ausgezeichnete Berührungsebene. Jener Punkt ist Rückkehrpunkt der Kurve $S=0$, $S'=0$ und diese Ebene ist Rückkehrebene der Enveloppe $\Sigma=0$, $\Sigma'=0$, denn die beiden Tangenten im Rückkehrpunkt werden $x_3=0$, $x_1^2=0$ und die beiden Erzeugenden in der Rückkehrebene werden $\xi_4=0$, $\xi_1^2=0$.

Die Flächenpaare VIII führen resp. zu den Complexen:

$$\begin{array}{l} O\equiv a_{12}p_{12}^2+a_{13}p_{13}^2+(a_{23}-a_{44})p_{23}^2-a_{22}p_{34}^2+2a_{14}p_{12}p_{13}+2a_{12}p_{13}p_{14}\\ \qquad +2a_{22}p_{23}p_{24}-2a_{24}p_{32}p_{34}=0,\\ \Omega\equiv\alpha_{12}\pi_{12}^2+\alpha_{14}\pi_{14}^2+(\alpha_{24}-\alpha_{33})\pi_{24}^2-\alpha_{22}\pi_{43}^2+2\alpha_{13}\pi_{12}\pi_{14}+2\alpha_{12}\pi_{14}\pi_{13}\\ \qquad +2\alpha_{22}\pi_{24}\pi_{23}-2\alpha_{24}\pi_{42}\pi_{43}=0, \end{array} \quad 1.$$

welche identisch werden wenn

$$\frac{a_{12}}{\alpha_{22}} = \frac{a_{22}}{\alpha_{12}} = \frac{a_{13}}{\alpha_{33} - \alpha_{24}} = \frac{a_{44} - a_{23}}{\alpha_{14}} = -\frac{a_{14}}{\alpha_{23}} = -\frac{a_{24}}{\alpha_{13}}. \qquad 2.$$

In diesem Falle wird:

$$\begin{aligned}
&O_1 \equiv a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2 + 2a_{14}x_2x_3 + 2a_{12}x_3x_4 = 0,\\
&O_1' \equiv a_{22}^2x_2^2 + (a_{24}^2 - a_{22}(a_{23} - a_{44}))x_3^2 + 2a_{22}a_{24}x_2x_3 + 2a_{22}^2x_3x_4 = 0,\\
&\Omega_1 \equiv \alpha_{12}\xi_2^2 + \alpha_{14}\xi_4^2 + 2\alpha_{13}\xi_2\xi_4 + 2\alpha_{12}\xi_4\xi_3 = 0,\\
&\Omega_1' \equiv \alpha_{22}^2\xi_2^2 + (\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}(\alpha_{24} - \alpha_{33}))\xi_4^2 + 2\alpha_{22}\alpha_{23}\xi_2\xi_4 + 2\alpha_{22}^2\xi_4\xi_3 = 0.
\end{aligned} \qquad 3.$$

Was die Gleichungen der Singularitätenfläche betrifft, so lassen dieselben sich in die Formen bringen:

$$O_1O_1' + Lx_1^2 = 0,\ \Omega_1\Omega_1' + \mathcal{A}\xi_{S1}^2 = 0,\ (L + a_{12}^3x_1^2)^2 = lx_3^3,\ (\mathcal{A} + \alpha_{12}^3\xi_{S1}^2)^2 = \lambda\xi_{S4}^3, \qquad 4.$$

worin l und λ lineare, L und $\mathcal{A}$ aber die quadratischen Ausdrücke bedeuten:

$$\begin{aligned}
L = {} & 2a_{12}^3x_1^2 + 2a_{12}^2a_{22}x_2^2 + 2a_{12}(a_{14}a_{22} + a_{24}a_{12})x_2x_3 + 4a_{12}^2a_{22}x_3x_4\\
& + \left(2a_{12}a_{14}a_{24} - a_{22}a_{14}^2 - a_{12}^2(a_{23} - a_{44}) + a_{12}a_{22}a_{13}\right)x_3^2,\\
\mathcal{A} = {} & 2\alpha_{12}^3\xi_1^2 + 2\alpha_{12}^2\alpha_{22}\xi_2^2 + 2_{12}(\alpha_{13}\alpha_{22} + \alpha_{23}\alpha_{12})\xi_2\xi_4 + 4\alpha_{12}^2\alpha_{22}\xi_4\xi_3\\
& + \left(2\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}^2 - \alpha_{12}^2(\alpha_{24} - \alpha_{33}) + \alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{14}\right)\xi_4^2.
\end{aligned}$$

Die Singularitätenfläche hat zwei Rückkehrlinien D und D′:

$$x_3 = 0,\ a_{12}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0 \text{ oder } \xi_4 = 0,\ \alpha_{12}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 = 0.$$

Deren gemeinsamer Punkt p ist ein bilinearer Rückkehrpunkt und deren gemeinsame Ebene π ist eine bilineare Rückkehrebene. Sie besitzt ferner einen conischen Doppelpunkt a_1 und eine conische Doppelebene α_1. Ihre Schnittkurve mit $x_1 = 0$ besteht nämlich aus Ω_1 und Ω_1', zwischen denen p oskulirender Punkt und deren zweiter gemeinsame Punkt ein conischer Doppelpunkt ist; ebenso besteht der Tangentialkegel von $\xi_1 = 0$ aus O_1 und O_1', zwischen denen p oskulirende Ebene und deren zweite gemeinsame Ebene eine conische Doppelebene ist. Die Punkte a und a′, in denen α_1 die Linien D und D′ trifft, sind bilineare Doppelpunkte, denn dieselben schicken ausser dem Ebenenbüschel D resp. D′ noch den Ebenenbüschel $\alpha_1\,\alpha$ resp. $\alpha_1\,\alpha'$ an die Fläche. Die Ebenen α und α', welche a_1 durch die Linien D und D′ schickt, sind bilineare Doppelebenen, denn dieselben berühren ausser in D resp. D′ noch in a_1 a resp. a_1 a

die Fläche*). Ueberhaupt, es geht die in § 15 betrachtete Fläche in die gegenwärtige über, wenn dort zusammenfallen: $x_2 = 0$ mit $x_3 = 0$, $\xi_2 = 0$ mit $\xi_4 = 0$, somit b_1, b und b′ mit p, β_1, β und β' mit π, a_2 mit a, b_2 mit a′, α_2 mit α, β_2 mit α', und man erhält zur Erkennung der gegenseitigen Lage der Doppelpunkte und Doppelebenen die Tafel:

$$\left|\begin{array}{l} a\,p = \alpha\,\pi \\ a'p = \alpha'\pi \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} a_1 p = \alpha\,\alpha' \\ a\;a' = \alpha_1\pi \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} a\,a = \alpha_1\alpha \\ a'a' = \alpha_1\alpha' \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} a_1 a = \alpha\,\alpha \\ a_1 a' = \alpha'\alpha' \end{array}\right|$$

§ 23. Die Grundflächenkette des vorigen Complexes VIII.

Jede Fläche $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2\,a_4 x_2 x_3 + 2\,a_5 x_3 x_4 = 0$ oder $\alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2\,\alpha_3 \xi_2 \xi_4 + 2\,\alpha_5 \xi_4 \xi_3 = 0$ ist Grundfläche für den letzten Complex, wenn resp.:

$$\begin{array}{l} (a_2 - a_5)(a_1 a_{22} - a_5 a_{12}) = 0,\quad a_1 a_4 a_{22} - a_1 a_5 a_{24} - a_4 a_5 a_{12} + a_5^2 a_{14} = 0, \\ a_1 a_4^2 a_{22} - 2 a_1 a_4 a_5 a_{24} + a_1 a_3 a_5 a_{22} - a_2 a_3 a_5 a_{12} + a_2 a_5^2 a_{13} \\ \qquad\qquad - a_1 a_5^2 (a_{23} - a_{44}) = 0; \\ (\alpha_2 - \alpha_5)(\alpha_1 \alpha_{22} - \alpha_5 \alpha_{12}) = 0,\quad \alpha_1 \alpha_3 \alpha_{22} - \alpha_1 \alpha_5 \alpha_{23} - \alpha_3 \alpha_5 \alpha_{12} + \alpha_5^2 \alpha_{13} = 0, \\ \alpha_1 \alpha_3^2 \alpha_{22} - 2\alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_{23} + \alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_{22} - \alpha_2 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_{12} + \alpha_2 \alpha_5^2 \alpha_{14} \\ \qquad\qquad - \alpha_1 \alpha_5^2 (\alpha_{24} - \alpha_{33}) = 0. \end{array} \quad 1.$$

Daraus folgt, dass jede Grundfläche repräsentirt wird durch:

$$\begin{array}{l} S \equiv k\,x_1^2 + x_2^2 + \dfrac{\begin{array}{l} k a_{22}(a_{14} - k a_{24})^2 - 2k a_{24}(a_{14} - k a_{24})(a_{12} - k a_{22}) \\ \quad + (a_{13} - k(a_{23} - a_{44}))(a_{12} - k a_{22})^2 \end{array}}{(a_{12} - k a_{22})^3} x_3^2 \\ \qquad + 2\,\dfrac{a_{14} - k a_{24}}{a_{12} - k a_{22}} x_2 x_3 + 2\,x_3 x_4 = 0, \\ \Sigma \equiv \varkappa\,\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dfrac{\begin{array}{l} \varkappa\alpha_{22}(\alpha_{13} - \varkappa\alpha_{23})^2 - 2\varkappa\alpha_{23}(\alpha_{13} - \varkappa\alpha_{23})(\alpha_{12} - \varkappa\alpha_{22}) \\ \quad + (\alpha_{14} - \varkappa(\alpha_{24} - \alpha_{33}))(\alpha_{12} - \varkappa\alpha_{22})^2 \end{array}}{(\alpha_{12} - \varkappa\alpha_{22})^3} x_4^2 \\ \qquad + 2\,\dfrac{\alpha_{13} - \varkappa\alpha_{23}}{\alpha_{12} - \varkappa\alpha_{22}} \xi_2 \xi_4 + 2\,\xi_4 \xi_3 = 0. \end{array} \quad 2.$$

*) Man erkennt nun die Identität des erhaltenen Complexes mit dem Complex 46. oder [33.] bei Weiler. (Die conischen Doppelebenen der Singularitätenfläche führt Weiler nicht an), Segre und Loria erwähnen diesen Complex p. 221. a. a. O.

S und S′ entsprechen sich in erster Art wenn $k + k' = \frac{2\,a_{12}}{a_{22}}$, Σ und Σ' in zweiter Art wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\,\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k} = \frac{a_{12}^2}{a_{22}^2}$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa} = \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{22}^2}$ sich zugeordnet.*)

Alle Flächen dieser Schaar stehen, wie die Flächenpaare von denen wir in § 22 ausgingen, in solcher Berührung, dass stets $\xi_4 = 0$ Spitze für die gemeinsame Kurve und $x_3 = 0$ Rückkehrebene für die gemeinsame Enveloppe je zweier Flächen ist. Drei der vier Kettentheile sind verschwunden, indem deren Flächen sämmtlich mit $x_3^2 = 0$ resp. $\xi_4^2 = 0$ zusammenfielen; letztere machen zugleich das isolirte Kettenglied aus. Die Gleichungen 2. repräsentiren dann den noch übrigen Kettentheil. In der That erhalten wir den Complexkegel O_1 für $k = 0$, die Complexkurve Ω_1 für $\varkappa = 0$ und nur eine sich selbst zugeordnete Fläche für

$$k = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \text{ resp. } \varkappa = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}.$$

Durch jeden Punkt gehen vier und jede Ebene berühren vier Grundflächen. Wir erhalten daher wieder auf der Singularitätenfläche zweierlei Schaaren von Kurven 4. Ordnung, welche sämmtlich in $\xi_4 = 0$ eine Spitze haben, und zweierlei Schaaren von Enveloppen 4. Klasse, welche sämmtlich in $x_3 = 0$ eine Rückkehrebene haben. Dem entsprechend muss noch ein zweiter Complex O′ (Ω') existiren, der die nämliche Singularitätenfläche wie O (Ω) besitzt und bei welchem die zweierlei Kurven- und Enveloppenschaaren ihre Rollen vertauschen. In der That findet man als diesen Complex:**)

---

*) Gemäss der Relation $(a_2 - a_5)\,(a_1\,a_{22} - a_5\,a_{12}) = 0$ in 1. nahmen wir zur Ableitung der Gleichungen 2. $a_2 = a_5$ an. Würden wir a_2 und a_5 verschieden nehmen, so hätten wir $a_1\,a_{22} = a_5\,a_{12}$ zu setzen. Dadurch erhielten wir noch eine zweite Flächenschaar, welche sogar zwei veränderliche Parameter in ihren Gleichungen enthielte; es ginge aber die zweite der Relationen 1. über in $a_{12}\,a_{42} - a_{22}\,a_{41} = 0$, welche den Complex spezialisiren würde. Erst für den in § 24 betrachteten Complex, wo diese Spezialisirung thatsächlich eintritt, darf daher dies geschehen, so dass wir in § 25 eine Flächenschaar mit zwei veränderlichen Parametern erhalten, die also merkwürdiger Weise dann zweifach unendlich viele Grundflächen umfasst.

**) Segre und Loria erwähnen von diesem zweiten Complex nichts.

$$O' \equiv a_{12}^2\, a_{22}^2\, p_{12}^2 + (a_{24}^2 - a_{22}\, a_{23} + a_{22}\, a_{44})\, a_{12}^2\, p_{13}^2$$
$$+ \left(\frac{a_{14}^2}{a_{12}} - a_{13}\right) a_{22}^3\, p_{23}^2 - a_{22}^3\, a_{12}\, p_{34}^2 + 2\, a_{22}\, a_{24}\, a_{12}^2\, p_{12}\, p_{13}$$
$$+ 2\, a_{12}^2\, a_{22}^2\, p_{13}\, p_{14} + 2\, a_{22}^3\, a_{12}\, p_{23}\, p_{24} - 2\, a_{22}^3\, a_{14}\, p_{32}\, p_{34} = 0, \qquad 3.$$
$$\Omega' \equiv \alpha_{12}^2\, \alpha_{22}^2\, \pi_{12}^2 + (\alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\, \alpha_{24} + \alpha_{22}\, \alpha_{33})\, \alpha_{12}^2\, \pi_{14}^2$$
$$+ \left(\frac{\alpha_{13}^2}{\alpha_{12}} - \alpha_{14}\right) \alpha_{22}^3\, \pi_{24}^2 - \alpha_{22}^3\, \alpha_{12}\, \pi_{43}^2 + 2\, \alpha_{22}\, \alpha_{23}\, \alpha_{12}^2\, \pi_{12}\, \pi_{14}$$
$$+ 2\, \alpha_{12}^2\, \alpha_{22}^2\, \pi_{14}\, \pi_{13} + 2\, \alpha_{22}^3\, \alpha_{12}\, \pi_{24}\, \pi_{23} - 2\, \alpha_{22}^3\, \alpha_{13}\, \pi_{42}\, \pi_{43} = 0.$$

Die Grundflächenkette von O' (Ω'), zu welcher der Kegel O_1' und die Kurve Ω_1' gehört, ist zwar eine andere wie die von O (Ω), es gelten aber für sie wieder die analogen Sätze. Keine dieser beiden Ketten kann sich in Ringe auflösen.

§ 24. Der Complex, dessen Grundflächen einen Kegelschnitt und ein denselben in einem und demselben Punkt treffendes Linienpaar gemeinsam haben.

Wir stellen die Gleichungen der Grundflächen in den Formen auf:

$$S \equiv a_1 x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2\, a_4 x_2 x_3 + 2\, a_1 x_3 x_4 = 0,\quad S' \equiv a_1' x_1^2 + \ldots = 0;$$
$$\Sigma \equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_1 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2\, \alpha_3 \xi_2 \xi_4 + 2\, \alpha_1 \xi_4 \xi_3 = 0,\quad \Sigma' \equiv \alpha_1' \xi_1^2 + \ldots = 0. \qquad \text{IX.}$$

Die Kurve $S = 0$, $S' = 0$, liegt in dem Ebenenpaar $a_{13}' x_3^2 + 2\, a_{14}' x_2\, x_3 = 0$, besteht darum aus dem Linienpaar $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und aus einem Kegelschnitt, der die Spitze des letztern trifft. Diese Spitze ist als dreifacher Doppelpunkt der Kurve $S = 0$, $S' = 0$ dreifacher Berührungspunkt zwischen S und S'.

Die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ geht durch das Punktpaar $\alpha_{14}' \xi_4^2 + 2\, \alpha_{13}' \xi_2 \xi_4 = 0$, besteht darum aus dem Linienpaar $\xi_4 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ und aus einem Kegel, der die Ebene des letzteren berührt. Diese Ebene ist als dreifache Doppelebene der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ dreifache Berührungsebene zwischen Σ und Σ'.

$\xi_4 = 0$ ist der dreifache Berührungspunkt und daselbst $x_3 = 0$ die dreifache Berührungsebene sowohl zwischen S und S' als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare IX. führen resp. zu den Complexen:

$$O \equiv a_{11}\, p_{12}^2 + a_{13}\, p_{13}^2 + (a_{13} - a_{44})\, p_{23}^2 - a_{11}\, p_{34}^2 + 2\, a_{14}\, p_{12}\, p_{13}$$
$$+ 2\, a_{11}\, p_{13}\, p_{14} + 2\, a_{11}\, p_{23}\, p_{24} - 2\, a_{14}\, p_{32}\, p_{34} = 0,$$
$$\Omega \equiv \alpha_{11}\, \pi_{12}^2 + \alpha_{14}\, \pi_{14}^2 + (\alpha_{14} - \alpha_{33})\, \pi_{24}^2 - \alpha_{11}\, \pi_{43}^2 + 2\, \alpha_{13}\, \pi_{12}\, \pi_{14} \qquad 1.$$
$$+ 2\, \alpha_{11}\, \pi_{14}\, \pi_{13} + 2\, \alpha_{11}\, \pi_{24}\, \pi_{23} - 2\, \alpha_{13}\, \pi_{42}\, \pi_{43} = 0,$$

welche identisch werden, wenn:

$$\frac{a_{11}}{\alpha_{11}} = \frac{a_{13}}{\alpha_{33} - \alpha_{14}} = \frac{a_{44} - a_{13}}{\alpha_{14}} = -\frac{a_{14}}{\alpha_{13}}. \qquad 2.$$

Hier wird:

$$\begin{aligned}
&O_1 \equiv a_{11}\, x_2^2 + a_{13}\, x_3^2 + 2\, a_{14}\, x_2\, x_3 + 2\, a_{11}\, x_3\, x_4 = 0,\\
&O_1' \equiv a_{11}^2\, x_2^2 + (a_{41}^2 - a_{11}(a_{13} - a_{44}))\, x_3^2 + 2\, a_{11}\, a_{14}\, x_2\, x_3 + 2\, a_{11}^2\, x_3\, x_4 = 0,\\
&\Omega_1 \equiv \alpha_{11}\, \xi_2^2 + \alpha_{14}\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_{13}\, \xi_2\, \xi_4 + 2\, \alpha_{11}\, \xi_4\, \xi_3 = 0,\\
&\Omega_1' \equiv \alpha_{11}^2\, \xi_2^2 + (\alpha_{31}^2 - \alpha_{11}(\alpha_{14} - \alpha_{33}))\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_{11}\, \alpha_{13}\, \xi_2\, \xi_4 + 2\, \alpha_{11}^2\, \xi_4\, \xi_3 = 0.
\end{aligned} \qquad 3.$$

Als Gleichungen der Singularitätenfläche findet man:

$$\begin{aligned}
&[a_{11}^2 (x_1^2 + x_2^2 + 2\, x_3\, x_4) + (a_{14}^2 + a_{11}\, a_{44} - a_{11}\, a_{13})\, x_3^2 + 2\, a_{11}\, a_{14}\, x_2\, x_3]\\
&\cdot [a_{11}(x_1^2 + x_2^2 + 2\, x_3\, x_4) + a_{13}\, x_3^2 + 2\, a_{14}\, x_2\, x_3] = 0,\\
&[\alpha_{11}^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\, \xi_4\, \xi_3) + (\alpha_{13}^2 + \alpha_{11}\, \alpha_{33} - \alpha_{11}\, \alpha_{14})\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_{11}\, \alpha_{13}\, \xi_2\, \xi_4]\\
&\cdot [\alpha_{11}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\, \xi_4\, \xi_3) + \alpha_{14}\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_{13}\, \xi_2\, \xi_4] = 0.
\end{aligned} \qquad 4.$$

Dieselbe zerfällt in zwei Flächen U und U′ vom 2. Grad, welche sich längs den zwei Erzeugenden $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ oder $\xi_4 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ berühren. Letztere Singularitätenfläche ist somit die gleiche wie die in § 19 betrachtete. Trotzdem darf obiger Complex nicht als identisch mit dem des § 19 angesehen werden, denn seine Grundflächen haben, wie man in § 25 sehen wird, eine andere Lage.

§ 25. Die Grundflächenkette des letzten Complexes IX.

Jede Fläche $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2\, a_4\, x_2\, x_3 + 2\, a_5\, x_3\, x_4 = 0$ oder $\alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2\, \alpha_3\, \xi_2\, \xi_4 + 2\, \alpha_5\, \xi_4\, \xi_3 = 0$ ist Grundfläche für den letzten Complex, sobald:

$$\begin{aligned}
&(a_1 - a_5)(a_2 - a_5) = 0,\ (a_1 - a_5)(a_4\, a_{11} - a_5\, a_{14}) = 0,\\
&a_1\, a_4^2\, a_{11} - 2\, a_1\, a_4\, a_5\, a_{14} + a_1\, a_3\, a_5\, a_{11} - a_2\, a_3\, a_5\, a_{11} + a_2\, a_5^2\, a_{13}\\
&\qquad - a_1\, a_5^2 (a_{13} - a_{44}) = 0;\\
&(\alpha_1 - \alpha_5)(\alpha_2 - \alpha_5) = 0,\ (\alpha_1 - \alpha_5)(\alpha_3\, \alpha_{11} - \alpha_5\, \alpha_{13}) = 0,\\
&\alpha_1\, \alpha_3^2\, \alpha_{11} - 2\, \alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_5\, \alpha_{13} + \alpha_1\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_{11} - \alpha_2\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_{11} + \alpha_2\, \alpha_5^2\, \alpha_{14}\\
&\qquad - \alpha_1\, \alpha_5^2 (\alpha_{14} - \alpha_{33}) = 0.
\end{aligned} \qquad 1.$$

Diese Relationen lassen drei verschiedene Lösungen zu, so dass wir drei Schaaren von Grundflächen erhalten. Die erste Schaar wird repräsentirt durch:

$$\begin{aligned} S \equiv k\,x_1^2 + a_{11}\,x_2^2 + \frac{k\,a_{14}^2 + k\,a_{11}(a_{13} - a_{44}) - a_{11}^2\,a_{13}}{a_{11}(k - a_{11})}\,x_3^2 \\ + 2\,a_{14}\,x_2\,x_3 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0, \\ \Sigma \equiv \varkappa\,\xi_1^2 + \alpha_{11}\,\xi_2^2 + \frac{\varkappa\,\alpha_{13}^2 + \varkappa\,\alpha_{11}(\alpha_{14} - \alpha_{33}) - \alpha_{11}^2\,\alpha_{14}}{\alpha_{11}(\varkappa - \alpha_{11})}\,\xi_4^2 \\ + 2\,\alpha_{13}\,\xi_2\,\xi_4 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0, \end{aligned} \qquad 2.$$

die zweite Schaar durch:

$$\begin{aligned} S \equiv a_{11}\,x_1^2 + k\,x_2^2 + \frac{l^2 - 2\,l\,a_{14} + a_{13}(k - a_{11}) + a_{11}\,a_{44}}{k - a_{11}}\,x_3^2 \\ + 2\,l\,x_2\,x_3 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0, \\ \Sigma \equiv \alpha_{11}\,\xi_1^2 + \varkappa\,\xi_2^2 + \frac{\lambda^2 - 2\,\lambda\,\alpha_{13} + \alpha_{14}(\varkappa - \alpha_{11}) + \alpha_{11}\,\alpha_{33}}{\varkappa - \alpha_{11}}\,\xi_4^2 \\ + 2\,\lambda\,\xi_2\,\xi_4 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0, \end{aligned} \qquad 3.$$

worin nicht nur k und $\varkappa$, sondern auch l und λ veränderliche Parameter sind; endlich wird die dritte Schaar repräsentirt durch:

$$\begin{aligned} S \equiv a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + k\,x_3^2 + 2\,s\,x_2\,x_3 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0, \\ \Sigma \equiv \alpha_{11}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \varkappa\,\xi_4^2 + 2\,\sigma\,\xi_2\,\xi_4 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0, \end{aligned} \qquad 4.$$

worin die Charakteristiken s und σ resp. Wurzeln der Gleichungen sein müssen:

$$a_{11}\,s^2 - 2\,a_{14}\,s + a_{44} = 0, \quad \alpha_{11}\,\sigma^2 - 2\,\alpha_{13}\,\sigma + \alpha_{33} = 0. \qquad 5.$$

In der ersten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = 2\,a_{11}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = 2\,\alpha_{11}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k} = a_{11}^2$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa} = \alpha_{11}^2$ sich zugeordnet.

In der zweiten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = 2\,a_{11}$ und $l + l' = 2\,a_{14}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = 2\,\alpha_{11}$ und $\lambda + \lambda' = 2\,\alpha_{13}$, dagegen sind S und $\bar{S}$ für $k\,\bar{k} = a_{11}^2$, $l\,k - a_{14}\,k + a_{11}\,l - a_{11}\,a_{14} = 0$, Σ und $\bar{\Sigma}$ für $\varkappa\,\bar{\varkappa} = \alpha_{11}^2$, $\bar{\lambda}\,k - \alpha_{13}\,\varkappa + \alpha_{11}\,\lambda - \alpha_{11}\,\alpha_{13} = 0$ sich zugeordnet.

In der dritten Schaar entsprechen sich S und S′ wenn $k + k' = 2\,a_{13}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = 2\,\alpha_{14}$, dagegen sind

$$S \text{ und } \overline{S} \text{ für } k + \overline{k} = \frac{2\,(a_{14}^2 + a_{11}\,a_{44} - a_{11}\,a_{13})}{a_{11}},$$

$$\Sigma \text{ und } \overline{\Sigma} \text{ für } \varkappa + \overline{\varkappa} = \frac{2\,(\alpha_{13}^2 + \alpha_{11}\,\alpha_{44} - \alpha_{11}\,\alpha_{14})}{\alpha_{11}}$$

sich zugeordnet; jedoch müssen zweien sich entsprechenden oder sich zugeordneten Flächen stets verschiedene Charakteristiken zukommen.

Wie die Grundflächen selbst und wie die zweierlei Kurven- und Enveloppenschaaren hier auf der Singularitätenfläche liegen, geht aus Folgendem hervor:

Zwischen den Flächen der ersten Schaar ist $\xi_4 = 0$ doppelter Berührungspunkt und daselbst $x_3 = 0$ doppelte Berührungsebene. Das Ebenenpaar

$$(k - a_{11})^2\,x_1^2 + (a_{14}^2 - a_{11}\,a_{44})\,x_3^2 = 0$$

trifft die U in der von singulären Linien umhüllten Kurve $S = 0$, $S' = 0$, das Punktpaar

$$(\varkappa - \alpha_{11})^2\,\xi_1^2 + (\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\,\alpha_{33})\,\xi_4^2 = 0$$

schickt an die U′ die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$; dagegen kommen weder der Kurve $S = 0$, $\overline{S} = 0$, in der das Ebenenpaar

$$a_{11}\,(k - a_{11})^2\,x_1^2 + k\,(a_{14}^2 - a_{11}\,a_{44})\,x_3^2 = 0$$

die U′ trifft, noch der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\overline{\Sigma} = 0$, welche das Punktpaar

$$\alpha_{11}\,(\varkappa - \alpha_{11})^2\,\xi_1^2 + \varkappa\,(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\,\alpha_{33})\,\xi_4^2 = 0$$

an die U schickt, singuläre Linien zu.

Zwischen sämmtlichen Flächen der zweiten Schaar ist ebenfalls $\xi_4 = 0$ doppelter Berührungspunkt und daselbst $x_3 = 0$ doppelte Berührungsebene. Das Ebenenpaar

$$(k - a_{11})^2\,x_2^2 + (l^2 - 2\,l\,a_{14} + a_{11}\,a_{14})\,x_3^2 + 2\,(k - a_{11})\,(l - a_{14})\,x_2\,x_3 = 0$$

trifft die U in der von singulären Linien umhüllten Kurve $S = 0$, $S' = 0$, das Punktpaar

$$(\varkappa - \alpha_{11})^2\,\xi_2^2 + (\lambda^2 - 2\,\lambda\,\alpha_{13} + \alpha_{11}\,\alpha_{13})\,\xi_4^2 + 2\,(\varkappa - \alpha_{11})\,(\lambda - \alpha_{13})\,\xi_2\,\xi_4 = 0$$

schickt an die U′ die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$; dagegen kommen weder der Kurve $S = 0$, $\overline{S} = 0$, in der das Ebenenpaar

$$a_{11}^2 (k - a_{11})^2 x_2^2 + (a_{11}^2 l^2 - 2 a_{11}^2 a_{14} l - a_{14}^2 k^2 + a_{11}^2 a_{44} k + a_{11}^2 a_{14}^2) x_3^2 + 2 a_{11}^2 (k - a_{11}) (l - a_{14}) x_2 x_3 = 0$$

die U′ trifft, noch der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\overline{\Sigma} = 0$, welche das Punktpaar

$$\alpha_{11}^2 (\varkappa - \alpha_{11})^2 \xi_2^2 + (\alpha_{11}^2 \lambda^2 - 2 \alpha_{11}^2 \alpha_{13} \lambda - \alpha_{13}^2 \varkappa^2 + \alpha_{11}^2 \alpha_{33} \varkappa + \alpha_{11}^2 \alpha_{13}^2) \xi_4^2 + 2 \alpha_{11}^2 (\varkappa - \alpha_{11}) (\lambda - \alpha_{13}) \xi_2 \xi_4 = 0$$

an die U schickt, singuläre Linien zu. Man sieht, dass jedes Ebenenpaar durch $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ aus U die gemeinsame Kurve zweier sich in erster Art entprechender, aus U′ die gemeinsame Kurve zweier sich zugeordneter Flächen ausschneidet, dass ebenso jedes Punktpaar auf $\xi_2 = 0$, $\xi_4 = 0$ an die U′ die gemeinsame Enveloppe zweier sich in zweiter Art entsprechender, an die U die gemeinsame Enveloppe zweier sich zugeordneter Flächen schickt; es gibt aber zweifach unendlich viele solcher Ebenenpaare und Punktpaare, wie es zweifach unendlich viele Flächen in der zweiten Schaar gibt. Jede Ebene durch $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ trifft die U oder die U′ nach einem Kegelschnitt, der auf unendlich vielen Grundflächen liegt; jeder Punkt auf $\xi_2 = 0$, $\xi_4 = 0$ schickt an die U oder U′ einen Kegel, der unendlich viele Grundflächen umhüllt.

Zwischen den Flächen der dritten Schaar ist $\xi_4 = 0$ dreifacher Berührungspunkt und daselbst $x_3 = 0$ dreifache Berührungsebene. Sie liegen also so wie die Flächenpaare, von denen wir in § 24 ausgingen; sämmtliche haben das Linienpaar $x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$ oder $\xi_4 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ zur gemeinsamen Kurve und Enveloppe. Ausser diesem Linienpaar besitzt die von singulären Linien umhüllte Kurve $S = 0$, $S' = 0$ noch den Kegelschnitt, in dem die Ebene

$$(k - a_{13}) x_3 \pm 2 \sqrt{a_{14}^2 - a_{11} a_{44}} \, x_2 = 0$$

die U′ trifft, und die von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ noch den Kegel, den der Punkt

$$(\varkappa - \alpha_{14}) \xi_4 \pm 2 \sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33}} \, \xi_2 = 0$$

an die U schickt. Ausser demselben Linienpaar besitzt aber die nicht von singulären Linien umhüllte Kurve $S = 0$, $\overline{S} = 0$ noch den Kegelschnitt, in dem die Ebene

$$[a_{11} (k - a_{13}) - (a_{14}^2 - a_{11} a_{44})] x_3 \pm 2 a_{11} \sqrt{a_{14}^2 - a_{11} a_{44}} \, x_2 = 0$$

die U trifft, und die nicht von singulären Linien erzeugte Enveloppe $\Sigma = 0$, $\overline{\Sigma} = 0$ noch den Kegel, den der Punkt

$$[\alpha_{11}(\varkappa - \alpha_{14}) - (\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33})]\,\xi_4 \pm 2\,\alpha_{11}\sqrt{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}}\,\xi_2 = 0$$

an die U′ schickt.

Die erste Flächenschaar umfasst nur einen Kettentheil, denn sie enthält nur einen Kegel O_1 für $k = 0$, eine Kurve Ω_1 für $\varkappa = 0$ und nur eine sich selbst zugeordnete Fläche für $k = -a_{11}$ resp. $\varkappa = -\alpha_{11}$. In Ringe löst sich dieselbe nicht auf.

Die zweite Flächenschaar umfasst dagegen unendlich viele in sich abgeschlossene Kettentheile, denn sie enthält die Kegelschaar:

$$a_{11}x_1^2 - \frac{l^2 - 2\,a_{14}\,l - a_{11}(a_{13} - a_{44})}{a_{11}}x_3^2 + 2\,l\,x_2x_3 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0, \quad 6.$$

die Kurvenschaar:

$$\alpha_{11}\xi_1^2 - \frac{\lambda^2 - 2\,\alpha_{13}\,\lambda - \alpha_{11}(\alpha_{14} - \alpha_{33})}{\alpha_{11}}\xi_4^2 + 2\,\lambda\,\xi_2\,\xi_4 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0 \quad 7.$$

und eine Schaar von unendlich vielen Flächen, von denen jede sich selbst zugeordnet ist:

$$a_{11}x_1^2 - a_{11}x_2^2 - \frac{l^2 - 2a_{14}l - a_{11}(2a_{13} - a_{44})}{2\,a_{11}}x_3^2 + 2l\,x_2x_3 + 2\,a_{11}\,x_3\,x_4 = 0$$

oder 8.

$$\alpha_{11}\xi_1^2 - \alpha_{11}\xi_2^2 - \frac{\lambda^2 - 2\alpha_{13}\lambda - \alpha_{11}(2\alpha_{14} - \alpha_{33})}{2\,\alpha_{11}}\xi_4^2 + 2\lambda\,\xi_2\,\xi_4 + 2\,\alpha_{11}\,\xi_4\,\xi_3 = 0.$$

Auch die zweite Schaar löst sich nicht in Ringe auf.

Die dritte Schaar lässt nicht mehr die Betrachtungen des § 12 auf sich anwenden. Man findet aber von einer Fläche S oder Σ mit dem Parameter k resp. $\varkappa$ ausgehend als Parameter für die in der graphischen Darstellung der Kette aufeinanderfolgenden Flächen S_{2n}, S_{2n+1} oder Σ_{2n}, Σ_{2n+1}:

$$k_{2n} = 2\,n\,\frac{a_{14}^2 - a_{11}\,a_{44}}{a_{11}^2} + k, \quad k_{2n+1} = 2\,\frac{a_{13}}{a_{11}} - \left[2\,n\,\frac{a_{14}^2 - a_{11}\,a_{44}}{a_{11}^2} + k\right],$$

$$\varkappa_{2n} = 2\,n\,\frac{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\,\alpha_{33}}{\alpha_{11}^2} + \varkappa, \quad \varkappa_{2n+1} = 2\,\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}} - \left[2\,n\,\frac{\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\,\alpha_{33}}{\alpha_{11}^2} + \varkappa\right]. \quad 9.$$

Es ergeben sich ferner die Charakteristiken von S und S_{2n} oder Σ und Σ_{2n} als gleich, die Charakteristiken von S und S_{2n+1} oder Σ und Σ_{2n+1} als verschieden. Und dann beweist man wie für die zweite Schaar in § 18:

Die dritte Flächenschaar enthält keinen Kegel, keine Kurve und keine sich selbst zugeordnete Fläche; dennoch umfasst sie zwei getrennte Kettentheile, aber so, dass ein jeder sich auf beiden Seiten dem degenerirten Flächenpaare $x_3^2 = 0$, $\xi_1^2 = 0$ asymptotisch nähert, ohne dasselbe zu erreichen. Der eine Kettentheil geht aus dem andern dadurch hervor, dass man, während alle Parameter ungeändert bleiben, alle Charakteristiken vertauscht.

Der zweite Complex mit der gleichen Singularitätenfläche wird hier:

$$\begin{aligned} O' \equiv\ & a_{11}^2 p_{12}^2 + (a_{14}^2 - a_{11} a_{13} + a_{11} a_{44}) p_{13}^2 + (a_{14}^2 - a_{11} a_{13}) p_{23}^2 - a_{11}^2 p_{34}^2 \\ & + 2 a_{11} a_{14} p_{12} p_{13} + 2 a_{11}^2 p_{13} p_{14} + 2 a_{11}^2 p_{23} p_{24} - 2 a_{11} a_{14} p_{32} p_{34} = 0, \\ \Omega' \equiv\ & \alpha_{11}^2 \pi_{12}^2 + (\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{14} + \alpha_{11}\alpha_{33}) \pi_{14}^2 + (\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{14}) \pi_{24}^2 - \alpha_{11}^2 \pi_{43}^2 \\ & + 2\alpha_{11}\alpha_{13}\pi_{12}\pi_{14} + 2\alpha_{11}^2 \pi_{14}\pi_{13} + 2\alpha_{11}^2 \pi_{24}\pi_{23} - 2\alpha_{11}\alpha_{13}\pi_{42}\pi_{43} = 0, \end{aligned} \qquad 10.$$

Für die Kette desselben gelten die analogen Sätze wie für die von O (Ω), nur die Theile U und U′ der Singularitätenfläche vertauschen ihre Rollen. Keine dieser beiden Ketten kann sich in Ringe auflösen. Wird jedoch der Complex durch die Relation $a_{14}^2 - a_{11} a_{44} = 0$ oder $\alpha_{13}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33} = 0$ spezialisirt, so tritt auch hier zufolge der Ausdrücke 9. die Thatsache ein, dass die dritte Flächenschaar sich in lauter isolirte Glieder von je zwei Flächen auflöst, welche den Complex zugleich auf zwei reciproke Weisen erzeugen. Alle diese Flächen berühren sich dann sämmtlich längs den zwei Berührungslinien von U und U′.

§ 26. Der Complex, dessen Grundflächen sich in einer Kurve 3. Ordnung und in einer dieselbe doppelt treffenden Geraden schneiden.

Zwei Flächen in dieser Lage können durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} & S \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 a_3 x_1 x_3 + 2 a_4 x_2 x_4 = 0, \quad S' \equiv a_1' x_1^2 + \ldots = 0; \\ & \Sigma \equiv \alpha_3 \xi_3^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2 \alpha_1 \xi_3 \xi_1 + 2 \alpha_2 \xi_4 \xi_2 = 0, \quad \Sigma' \equiv \alpha_3' \xi_3^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \qquad X.$$

Die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ wird durch die Kegel $a_{31}' x_1^2 + a_{32}' x_2^2 + 2 a_{34}' x_2 x_4 = 0$, $a_{41}' x_1^2 + a_{42}' x_2^2 + 2 a_{43}' x_1 x_3 = 0$ bestimmt, besteht also aus einer Kurve 3. Ordnung und aus der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,

welche diese Kurve in jenen beiden Kegelspitzen $\xi_3 = 0$ und $\xi_4 = 0$ trifft. Diese Spitzen sind als Doppelpunkte der Kurve $S = 0$, $S' = 0$ Berührungspunkte zwischen S und S'.

Die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ wird durch die Kurven $\alpha'_{13}\,\xi_3^2 + \alpha'_{14}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha'_{12}\,\xi_4\,\xi_2 = 0$, $\alpha'_{23}\,\xi_3^2 + \alpha'_{24}\,\xi_4^2 + 2\,\alpha'_{21}\,\xi_3\,\xi_1 = 0$ bestimmt, besteht also aus einer Enveloppe 3. Klasse und aus der Geraden $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$, welche an diese Enveloppe jene beiden Kurvenebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ schickt. Diese Ebenen sind als Doppelebenen der Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ Berührungsebenen zwischen Σ und Σ'.

$\xi_3 = 0$ und $\xi_4 = 0$ sind die Berührungspunkte und daselbst $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ die Berührungsebenen sowohl zwischen S und S' als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare X. führen resp. zu den Complexen:

$$\begin{aligned} O \equiv\; & a_{12}\,p_{12}^2 - a_{33}\,p_{13}^2 - a_{44}\,p_{24}^2 + 2\,a_{14}\,p_{12}\,p_{14} + 2\,a_{23}\,p_{21}\,p_{23} \\ & + 2\,a_{34}\,(p_{12}\,p_{34} - p_{14}\,p_{23}) = 0, \\ \Omega \equiv\; & \alpha_{34}\,\pi_{34}^2 - \alpha_{11}\,\pi_{31}^2 - \alpha_{22}\,\pi_{42}^2 + 2\,\alpha_{32}\,\pi_{34}\,\pi_{32} + 2\,\alpha_{41}\,\pi_{43}\,\pi_{41} \\ & + 2\,\alpha_{12}\,(\pi_{34}\,\pi_{12} - \pi_{32}\,\pi_{41}) = 0, \end{aligned} \qquad 1.$$

welche identisch werden, wenn:

$$\frac{a_{12}}{\alpha_{34}} = \frac{a_{34}}{\alpha_{12}} = \frac{a_{33}}{\alpha_{22}} = \frac{a_{44}}{\alpha_{11}} = -\frac{a_{14}}{\alpha_{32}} = -\frac{a_{23}}{\alpha_{41}}. \qquad 2.$$

Für die Singularitätenfläche findet man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & a_{33}\,a_{14}^2\,x_1^4 + a_{44}\,a_{23}^2\,x_2^4 + (2\,a_{23}\,a_{14}\,a_{34} - a_{12}\,A)\,x_1^2\,x_2^2 + 4\,a_{33}\,a_{34}^2\,x_1^2\,x_3^2 \\ & + 4\,a_{44}\,a_{34}^2\,x_2^2\,x_4^2 + 4\,a_{14}\,a_{33}\,a_{34}\,x_1^3\,x_3 + 4\,a_{23}\,a_{44}\,a_{34}\,x_2^3\,x_4 \\ & + 2\,a_{14}\,A'\,x_1^3\,x_2\,x_4 + 2\,a_{23}\,A'\,x_2^2\,x_1\,x_3 + 4\,a_{34}\,A'\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4 = 0, \\ & \alpha_{11}\,\alpha_{32}^2\,\xi_3^4 + \alpha_{22}\,\alpha_{41}^2\,\xi_4^4 + (2\,\alpha_{41}\,\alpha_{32}\,\alpha_{12} - \alpha_{34}\,\mathcal{A})\,\xi_3^2\,\xi_4^2 + 4\,\alpha_{11}\,\alpha_{12}^2\,\xi_3^2\,\xi_4^2 \\ & + 4\,\alpha_{22}\,\alpha_{12}^2\,\xi_4^2\,\xi_2^2 + 4\,\alpha_{32}\,\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\xi_3^3\,\xi_1 + 4\,\alpha_{41}\,\alpha_{22}\,\alpha_{12}\,\xi_4^3\,\xi_2 \\ & + 2\,\alpha_{32}\,\mathcal{A}'\,\xi_3^2\,\xi_4\,\xi_2 + 2\,\alpha_{41}\,\mathcal{A}'\,\xi_4^2\,\xi_3\,\xi_1 + 4\,\alpha_{12}\,\mathcal{A}'\,\xi_3\,\xi_4\,\xi_1\,\xi_2 = 0, \end{aligned} \qquad 3.$$

worin $A' = a_{34}^2 + a_{33}\,a_{44} = \alpha_{12}^2 + \alpha_{11}\,\alpha_{22}$, $A = a_{34}^2 - a_{33}\,a_{44} = \alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\,\alpha_{22}$ gesetzt wurde.

Die letzten Gleichungen lassen sich dann in die Formen bringen:

$$[\sqrt{a_{33}}\,(a_{14}\,x_1 + 2\,a_{34}\,x_3)\,x_1 + \sqrt{a_{44}}\,(a_{23}\,x_2 + 2\,a_{34}\,x_4)\,x_2]^2$$
$$= x_1\,x_2 \cdot \Big[\Big(a_{12}\,A - 2\,a_{14}\,a_{23}\,(a_{34} - \sqrt{a_{33}a_{44}})\Big)\,x_1\,x_2$$
$$- 2\,(a_{34} - \sqrt{a_{33}a_{44}})^2\,(a_{14}\,x_1\,x_4 + 2\,a_{34}\,x_3\,x_4 + a_{23}\,x_2\,x_3)\Big], \quad *)$$
$$[\sqrt{\alpha_{11}}\,(\alpha_{32}\,\xi_3 + 2\,\alpha_{12}\,\xi_1)\,\xi_3 + \sqrt{\alpha_{22}}\,(\alpha_{41}\,\xi_4 + 2\,\alpha_{12}\,\xi_2)\,\xi_4]^2 \qquad 4.$$
$$= \xi_3\,\xi_4 \cdot \Big[\Big(\alpha_{34}\,\mathit{A} - 2\,\alpha_{32}\,\alpha_{41}\,(\alpha_{12} - \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}})\Big)\,\xi_3\,\xi_4$$
$$- 2\,(\alpha_{12} - \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}})^2\,(\alpha_{32}\,\xi_3\,\xi_2 + 2\,\alpha_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + \alpha_{41}\,\xi_4\,\xi_1)\Big].$$

Die Singularitätenfläche besitzt zwei bilineare Doppelebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ und zwei bilineare Doppelpunkte $\xi_3 = 0$ und $\xi_4 = 0$. Denn bezeichnen wir die drei Geraden:

$$x_1{=}0,\ x_2{=}0;\ x_1{=}0,\ a_{23}x_2{+}2a_{34}x_4{=}0;\ x_2{=}0,\ a_{14}x_1{+}2a_{34}x_3{=}0$$
oder 5.
$$\xi_3{=}0,\ \xi_4{=}0;\ \xi_3{=}0,\ \alpha_{41}\xi_4{+}2\alpha_{12}\xi_2{=}0;\ \xi_4{=}0,\ \alpha_{32}\xi_3{+}2\alpha_{12}\xi_1{=}0$$

mit A, B und B′, so zerfallen die Berührungskurven jener zwei Doppelebenen und die Berührungskegel jener zwei Doppelpunkte in die nämlichen beiden Linienpaare A, B resp. A, B′.

Da also alle Punkte und alle Ebenen dieser Linien Punkte und Ebenen der Fläche sind, so müssen dieselben Doppellinien sein; die A trifft B und B′ und zwar sind die Punkte A B und A B′ die bilinearen Doppelpunkte und die Ebenen A B und A B′ die bilinearen Doppelebenen der Fläche. Jede Ebene durch A trifft die Fläche noch nach einer Kurve 2. Grads und jeder Punkt auf A schickt an dieselbe noch einen Kegel 2. Grads. Für jede Ebene durch B oder B′ zerfällt aber die Schnittkurve und für jeden Punkt auf B oder B′ zerfällt der Tangentialkegel in ein Linienpaar. Denn die Schnittkurve einer Ebene durch B z. B. hat dort einen Doppelpunkt, wo die B′ getroffen wird.

Die Singularitätenfläche ist somit eine Linienfläche von der

*) Für $a_1 = a_2 = a_3$ und $a'_1 = a'_2 = a'_3$ hätten wir den Complex des § 17 und die Singularitätenfläche ginge über in: $[a_{11}\,(x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1\,x_3) + 2\,a_{14}\,x_2\,x_4] \cdot [a_{11}^2\,(x_1 + 2\,x_1\,x_3) + a_{11}\,a_{44}\,x_2^2 + 2\,a_{14}\,a_{44}\,x_2\,x_4] = 0$.

4. Ordnung und der 4. Klasse;*) es ist die spezielle Plücker'sche Complexfläche, welche als Leitgerade eine Doppeltangente der allgemeinen Singularitätenfläche hat.**)

§ 27. Die Grundflächenkette des vorigen Complexes X.

Soll eine Fläche $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 a_3 x_1 x_3 + 2 a_4 x_2 x_4 = 0$ oder $\alpha_3 \xi_3^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2 \alpha_1 \xi_3 \xi_1 + 2 \alpha_2 \xi_4 \xi_2 = 0$ Grundfläche für den vorigen Complex sein, so muss resp.:

$$\begin{aligned} &a_2(a_1 a_{34} - a_3 a_{14}) = a_4(a_1 a_{23} - a_3 a_{12}),\ a_3^2 a_{44} - 2 a_3 a_4 a_{34} + a_4^2 a_{33} = 0; \\ &\alpha_4(\alpha_3 \alpha_{12} - \alpha_1 \alpha_{32}) = \alpha_2(\alpha_3 \alpha_{41} - \alpha_1 \alpha_{34}),\ \alpha_1^2 \alpha_{22} - 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{12} + \alpha_2^2 \alpha_{11} = 0. \end{aligned} \quad 1.$$

Jede Grundfläche wird desshalb repräsentirt durch:

$$\begin{aligned} S &\equiv k x_1^2 + \frac{k a_{23} - s a_{21}}{k a_{43} - s a_{41}} x_2^2 + 2 s x_1 x_3 + 2 x_2 x_4 = 0, \\ \Sigma &\equiv \varkappa \xi_3^2 + \frac{\varkappa \alpha_{41} - \sigma \alpha_{43}}{\varkappa \alpha_{21} - \sigma \alpha_{23}} \xi_4^2 + 2 \sigma \xi_3 \xi_1 + 2 \xi_4 \xi_2 = 0, \end{aligned} \quad 2.$$

worin die Charakteristiken s und σ resp. Wurzeln der Gleichungen sein müssen:

$$s^2 a_{44} - 2 s a_{34} + a_{33} = 0, \quad \sigma^2 \alpha_{22} - 2 \sigma \alpha_{12} + \alpha_{11} = 0. \quad 3.$$

S und S′ entsprechen sich wenn $k + k' = \frac{2 a_{14}}{\alpha_{44}}$, Σ und Σ' wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2 \alpha_{32}}{\alpha_{22}}$, dagegen sind S und $\overline{S}$ für $k s_2 + \overline{k} s_1 = \frac{2 a_{14}}{a_{34}} s_1 s_2$,†) Σ und $\overline{\Sigma}$ für $\varkappa \sigma_2 + \overline{\varkappa} \sigma_1 = \frac{2 \alpha_{32}}{\alpha_{12}} \sigma_1 \sigma_2$ sich zugeordnet, vorausgesetzt, dass zweien sich entsprechenden oder sich zugeordneten Flächen stets verschiedene Charakteristiken zukommen (wie bei der zweiten Schaar in § 18).

Sämmtliche Grundflächen haben die Doppellinie A als gemeinsame Erzeugende, die Doppelpunkte A B und A B′ zu gemeinsamen

---

*) Man erkennt nun die Identität des erhaltenen Complexes mit dem Complexe 9. oder [11 (11) 2] bei Weiler. Segre und Loria erwähnen denselben p. 224. a. a. O.

**) Vergl. in Plücker's N. Geom. d. R. p. 340 die Fläche III.

†) Das Aufsuchen dieses Parameters $\overline{k}$, obwohl nicht ganz einfach, geschieht in analoger Weise, wie in § 4 die Gleichung der zugeordneten Fläche gefunden wurde.

Berührungspunkten und daselbst die Doppelebenen A B und A B′ zu gemeinsamen Berührungsebenen. Ausser der Linie A besitzt die gemeinsame Kurve je zweier Grundflächen noch eine Kurve 3. Ordnung, welche durch die Punkte A B und A B′ geht, und die gemeinsame Enveloppe je zweier Grundflächen noch eine Enveloppe 3. Klasse, welche die Ebenen A B und A B′ berührt.

Auch diese Flächenschaar lässt nicht die Betrachtungen des § 12. auf sich anwenden. Man findet aber indem man von einer Fläche S oder Σ mit dem Parameter k resp. $\varkappa$ ausgeht und der Reihe nach k_1 für die der S zugeordnete S_1, k_2 für die der S_1 in erster Art entsprechende S_2, k_3 für die der S_2 zugeordnete S_3, u. s. w. und ebenso $\varkappa_1$ für die der Σ zugeordnete Σ_1, $\varkappa_2$ für die der Σ_1 in zweiter Art entsprechende Σ_2, $\varkappa_3$ für die der Σ_2 zugeordnete Σ_3 u. s. w. sucht als Parameter für die in der graphischen Darstellung der Kette aufeinanderfolgenden Flächen S_{2n}, S_{2n+1} oder Σ_{2n}, Σ_{2n+1}:

$$k_{2n} = \frac{a_{14}}{a_{34}} \cdot \frac{s_1^n - s_2^n}{s_1^{n-1}} + k \frac{s_1^n}{s_2^n}, \quad k_{2n+1} = \frac{a_{14}}{a_{34}} \cdot \frac{s_2 (s_1^n + s_2^n)}{s_1^n} - k \frac{s_1^{n+1}}{s_2^{n+1}},$$

$$\varkappa_{2n} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{12}} \cdot \frac{\sigma_1^n - \sigma_2^n}{\sigma_1^{n-1}} + \varkappa \frac{\sigma_1^n}{\sigma_2^n}, \quad \varkappa_{2n+1} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{12}} \cdot \frac{\sigma_2 (\sigma_1^n + \sigma_2^n)}{\sigma_1^n} - \varkappa \frac{\sigma_1^{n+1}}{\sigma_2^{n+1}}. \quad 4.$$

Es ergeben sich ferner die Charakteristiken von S und S_{2n} oder Σ und Σ_{2n} als gleich, die Charakteristiken von S und S_{2n+1} oder Σ und Σ_{2n+1} als verschieden. So beweist man wie für die zweite Schaar in § 18:

Die Flächenschaar des Complexes enthält keinen Kegel, keine Kurve und keine sich selbst zugeordnete Fläche. Dennoch umfasst sie zwei getrennte Kettentheile, aber so, dass ein jeder sich auf der einen Seite dem Flächenpaar $x_1^2 = 0$, $\xi_3^2 = 0$, *auf der andern dem Flächenpaar* $x_2^2 = 0$, $\xi_4^2 = 0$ *asymptotisch nähert, ohne dieselben zu erreichen. Der eine Kettentheil geht aus dem andern dadurch hervor, dass man, während alle Parameter ungeändert bleiben, alle Charakteristiken vertauscht.*

Durch jeden Punkt gehen vier und jede Ebene berühren vier Grundflächen. Wir erhalten daher wieder auf der Singularitätenfläche zweierlei Schaaren von Kurven, die hier von der 3. Ordnung sind und sämmtlich durch die Doppelpunkte A B und A B′ gehen, und zweierlei Schaaren von Enveloppen, die hier von der 3. Klasse sind und sämmtlich die Doppelebenen A B und A B′ berühren. Dem

entsprechend existirt noch ein zweiter Complex $O'(\Omega')$, der die gleiche Singularitätenfläche wie $O(\Omega)$ besitzt und bei welchem die zweierlei Kurven- und Enveloppenschaaren ihre Rollen vertauschen.*)

Aus den Formeln 4. folgt:

Die Kette von $O(\Omega)$ löst sich in Ringe von je n Gliedern auf, wenn:

$$(a_{24} + \sqrt{a_{24}^2 - a_{22}\,a_{44}})^n = (a_{24} - \sqrt{a_{24}^2 - a_{22}\,a_{44}})^n.$$

§ 28. Der Complex, dessen Grundflächen sich längs einer Erzeugenden berühren und ausserdem zwei Erzeugende gemein haben.

Als Gleichungsformen für diese Grundflächen wählen wir:

$$S = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 a_3 x_1 x_2 + 2 a_5 x_2 x_4 = 0, \quad S' = a_1' x_1^2 + \ldots = 0;$$
$$\Sigma = \alpha_3 \xi_3^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2 \alpha_1 \xi_3 \xi_4 + 2 \alpha_4 \xi_4 \xi_2 = 0, \quad \Sigma' = \alpha_3' \xi_3^2 + \ldots = 0. \qquad \text{XI.}$$

Die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ liegt in dem Ebenenpaar $a_{31}' x_1^2 + a_{22}' x_2^2 = 0$, besteht also aus der doppelt zu zählenden Linie $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und noch aus zwei Linien, die durch $\xi_3 = 0$ resp. $\xi_4 = 0$ gehen und dort die erstere Linie treffen.

Die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ geht durch das Punktpaar $\alpha_{33}' \xi_3^2 + \alpha_{44}' \xi_4^2 = 0$, besteht also aus der doppelt zu zählenden Linie $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ und noch aus zwei Linien, die in $x_1 = 0$ resp. $x_2 = 0$ liegen und dort die erstere Linie treffen.

Sowohl zwischen S und S' als auch zwischen Σ und Σ' ist daher $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ oder $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ Berührungslinie, ferner sind $\xi_3 = 0$ und $\xi_4 = 0$ dreifache Berührungspunkte und daselbst $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ dreifache Berührungsebenen.

Die Flächenpaare XI. führen resp. zu den Complexen:

$$O = a_{12}\,p_{12}^2 - a_{33}\,p_{13}^2 - a_{22}\,p_{24}^2 + 2\,a_{13}\,p_{12}\,p_{14} + 2\,a_{22}\,p_{21}\,p_{23} + 2\,a_{32}\,(p_{12}\,p_{24} - p_{14}\,p_{23}) = 0,$$
$$\Omega = \alpha_{34}\,\pi_{24}^2 - \alpha_{11}\,\pi_{31}^2 - \alpha_{11}\,\pi_{42}^2 + 2\,\alpha_{31}\,\pi_{34}\,\pi_{32} + 2\,\alpha_{41}\,\pi_{42}\,\pi_{41} + 2\,\alpha_{11}\,(\pi_{24}\,\pi_{12} - \pi_{32}\,\pi_{41}) = 0, \qquad \text{1.}$$

welche identisch werden für:

$$\frac{a_{12}}{a_{24}} = \frac{a_{33}}{a_{11}} = -\frac{a_{13}}{a_{31}} = -\frac{a_{23}}{a_{41}}. \qquad \text{2.}$$

*) Siehe Segre und Loria, Math. Ann. Bd. 23, p. 224 den Fall [(11) 211].

Als Gleichungen der Singularitätenfläche findet man:

$$[a_{13}\, x_1^2 + a_{23}\, x_2^2 + 2\, a_{33}\, x_1\, x_3 + 2\, a_{33}\, x_2\, x_4]^2 = 0,$$
$$[\alpha_{31}\, \xi_3^2 + \alpha_{41}\, \xi_4^2 + 2\, \alpha_{11}\, \xi_3\, \xi_1 + 2\, \alpha_{11}\, \xi_4\, \xi_2]^2 = 0. \qquad 3.$$

Der Complex $p_{12}^2 = 0$ oder $\pi_{34}^2 = 0$ schneidet aus O (Ω) dessen singuläre Linien aus. Die Singularitätenfläche besteht aus einer doppelt zu zählenden Fläche 2. Grads. Alle ihre Tangenten, welche die Erzeugende p_{12} treffen, sind vierfache singuläre Complexlinien, die Erzeugenden unter ihnen sind zugleich Doppellinien des Complexes. Alle Punkte und Ebenen der Erzeugenden p_{12} sind Doppelpunkte resp. Doppelebenen des Complexes.*)

§ 29. Die Grundflächenkette des letzten Complexes XI.

Jede Fläche $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2\, a_3 x_1 x_3 + 2\, a_4 x_2 x_4 = 0$ oder $\alpha_3 \xi_3^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2\, \alpha_1 \xi_3 \xi_1 + 2\, \alpha_2 \xi_4 \xi_2 = 0$ ist Grundfläche für den vorigen Complex, wenn:

$$a_2 (a_1 a_{33} - a_3 a_{13}) = a_4 (a_1 a_{32} - a_3 a_{12}),\ a_3^2 - 2\, a_3 a_4 + a_4^2 = 0;$$
$$\alpha_4 (\alpha_3 \alpha_{11} - \alpha_1 \alpha_{31}) = \alpha_2 (\alpha_3 \alpha_{14} - \alpha_1 \alpha_{34}),\ \alpha_1^2 - 2\, \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 = 0. \qquad 1.$$

Jede Grundfläche wird desshalb repräsentirt durch:

$$S \equiv k\, x_1^2 + \frac{k\, a_{32} - a_{12}}{k\, a_{33} - a_{13}}\, x_2^2 + 2\, x_1\, x_3 + 2\, x_2\, x_4 = 0,$$
$$\Sigma \equiv \varkappa\, \xi_3^2 + \frac{\varkappa\, \alpha_{14} - \alpha_{34}}{\varkappa\, \alpha_{11} - \alpha_{31}}\, \xi_4^2 + 2\, \xi_3\, \xi_1 + 2\, \xi_4\, \xi_2 = 0. \qquad 2.$$

S und S′ entsprechen sich in erster Art und sind zugleich sich zugeordnet wenn $k + k' = \frac{2\, a_{13}}{a_{33}}$, Σ und Σ' entsprechen sich in zweiter Art und sind zugleich sich zugeordnet wenn $\varkappa + \varkappa' = \frac{2\, \alpha_{31}}{\alpha_{11}}$.

Sämmtliche Grundflächen haben längs der Linie p_{12} eine gemeinsame Berührung, je zwei treffen sich ausserdem noch in zwei Doppellinien des Complexes; sie liegen also sämmtlich so wie die Flächenpaare, von denen wir in § 28 ausgingen. Ausser der Linie

---

*) Der erhaltene Complex ist somit identisch mit dem Weiler'schen Complexe 15. oder [(12) (111)]. Segre und Loria erwähnen denselben p. 231. a. a. O.

p_{12} besitzt die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ noch die beiden Linien, in denen das Ebenenpaar

$$(a_{13} - k\, a_{33})^2\, x_1^2 + (a_{13}\, a_{23} - a_{12}\, a_{33})\, x_2^2 = 0$$

die Singularitätenfläche trifft, und die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ noch die beiden Linien, welche das Punktpaar

$$(\alpha_{31} - \varkappa\, \alpha_{11})^2\, \xi_3^2 + (\alpha_{31}\, \alpha_{41} - \alpha_{34}\, \alpha_{11})\, \xi_4^2 = 0$$

an die Singularitätenfläche schickt.

Da die entsprechende und die zugeordnete einer Fläche identisch werden, so fallen sowohl die zwei Kurven- als auch die zwei Enveloppenschaaren der Singularitätenfläche zusammen; dem entsprechend gibt es auch keinen zweiten Complex O' (Ω'), indem derselbe mit O (Ω) coincidirt.

Die Grundflächenkette löst sich in lauter isolirte Glieder auf; je zwei sich entsprechende Grundflächen erzeugen also stets den Complex zugleich auf zwei reciproke Weisen.

§ 30. Der Complex, dessen Grundflächen sich in einer Kurve 3. Ordnung und in einer dieselbe berührenden Geraden treffen.

Wir müssen hier die complizirten Formen für die Grundflächen zu Grunde legen:

$$\begin{aligned} S &\equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2\, a_3\, x_1\, x_2 + 2\, a_4\, x_1\, x_3 + 2\, a_5\, x_2\, x_3 + 2\, a_4 x_2 x_4 = 0, \\ S' &\equiv a_1' x_1^2 + \ldots = 0; \\ \Sigma &\equiv \alpha_3\, \xi_3^2 + \alpha_4 \xi_4^2 + 2\, \alpha_1\, \xi_3\, \xi_4 + 2\, \alpha_2\, \xi_3\, \xi_1 + 2\, \alpha_5\, \xi_4\, \xi_1 + 2\, \alpha_2 \xi_4 \xi_2 = 0, \\ \Sigma' &\equiv \alpha_3' \xi_3^2 + \ldots = 0. \end{aligned} \qquad \text{XII.}$$

Die Kurve $S = 0$, $S' = 0$ besteht aus einer Kurve 3. Ordnung und aus der Linie $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, welche die Kurve im doppelt zu zählenden Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ trifft. Die Enveloppe $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ besteht aus einer Enveloppe 3. Klasse und aus der Linie $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$, welche an die Enveloppe die doppelt zu zählende Ebene $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$, $\xi_1 = 0$ schickt.

$\xi_4 = 0$ ist der doppelte Berührungspunkt und $x_2 = 0$ daselbst die doppelte Berührungsebene sowohl zwischen S und S' als auch zwischen Σ und Σ'.

Die Flächenpaare XII. führen resp. zu den Complexen:

$$O \equiv (a_{33}-a_{12})p_{12}^2+a_{44}p_{13}^2+a_{55}p_{23}^2+a_{44}p_{24}^2+2(a_{34}-a_{15})p_{12}p_{13}$$
$$+2(a_{35}-a_{24})p_{21}p_{23}-2a_{14}p_{12}p_{14}+2a_{34}p_{21}p_{24}+2a_{54}p_{23}p_{24}$$
$$+2a_{45}p_{31}p_{32}+2a_{44}(p_{14}p_{23}-p_{12}p_{34})=0,$$
$$\Omega \equiv (\alpha_{11}-\alpha_{34})\pi_{34}^2+\alpha_{22}\pi_{31}^2+\alpha_{55}\pi_{41}^2+\alpha_{22}\pi_{42}^2+2(\alpha_{12}-\alpha_{35})\pi_{34}\pi_{31} \quad 1.$$
$$+2(\alpha_{15}-\alpha_{42})\pi_{43}\pi_{41}-2\alpha_{32}\pi_{34}\pi_{32}+2\alpha_{12}\pi_{43}\pi_{42}+2\alpha_{52}\pi_{41}\pi_{42}$$
$$+2\alpha_{25}\pi_{13}\pi_{14}+2\alpha_{22}(\pi_{32}\pi_{41}-\pi_{34}\pi_{12})=0,$$

welche identisch werden, wenn

$$\frac{a_{33}-a_{12}}{\alpha_{11}-\alpha_{34}}=\frac{a_{44}}{\alpha_{22}}=\frac{a_{55}}{\alpha_{55}}=\frac{a_{15}-a_{34}}{\alpha_{12}}=\frac{a_{35}-a_{24}}{\alpha_{42}-\alpha_{15}}=\frac{a_{34}}{\alpha_{35}-\alpha_{12}} \quad 2.$$
$$=-\frac{a_{14}}{\alpha_{32}}=-\frac{a_{54}}{\alpha_{25}}.$$

Die Gleichung der Singularitätenfläche wird sehr complizirt; wir suchen desshalb auf anderem Wege ihre Gestalt zu erkennen und zwar dadurch, dass wir die Singularitätenfläche des § 26 in die jetzige übergehen lassen. Dies geschieht, indem wir dort die Doppelpunkte A B und A B′ und ebenso die Doppelebenen A B und A B′ zusammenfallen lassen, denn dadurch geht auch die Lage der Flächenpaare XII. aus jener der Flächenpaare X. hervor. Auf diese Weise findet man:

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche mit einer Rückkehrlinie A: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ oder $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ und einer Selbstberührungslinie B: $x_1 = 0$, $2a_{44}x_3 + a_{14}x_1 = 0$ oder $\xi_3 = 0$, $2\alpha_{22}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_3 = 0$. Der Punkt A B ist ein ausgezeichneter bilinearer Doppelpunkt, die Ebene A B eine ausgezeichnete bilineare Doppelebene.*)

Auch eine eingehende Untersuchung der Grundflächenkette des letzten Complexes müssen wir uns versagen. Es ist zwar leicht zu zeigen, dass es einfach unendlich viele Grundflächen gibt, welche sämmtlich so liegen, wie die Flächenpaare, von denen wir ausgingen, jedoch wird es hier schwer, den Parameter für die zugeordnete Fläche abzuleiten. Dennoch wird man sich den Verlauf dieser Kette vorstellen können, wenn man in § 27. die nöthigen Spezialisirungen eintreten lässt. So gilt insbesondere: die Singularitätenfläche besitzt zweierlei Schaaren von Kurven 3. Ordnung, welche sämmtlich die Rückkehrlinie A in dem Punkt A B berühren, und zweierlei Schaaren von Enveloppen 3. Klasse, an welche sämmtlich die Rückkehrlinie A die doppelt zu zählende Ebene A B schickt.

*) Man erkennt daraus die Identität des erhaltenen Complexes mit dem Complexe 37. oder [(12) 3,] bei Weiler. Siehe auch Segre und Loria p. 224. a. a. O.